ΑΛΓΕΒΡΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ του βιβλίου

ΣΕΜΦΕ, 5ο Εξάμηνο

§2.1 - ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ : Σελίδες 143 - 146

Κάποιες γενικές παρατηρήσεις: Εστω $G =< a >$ και $f : G \longrightarrow G'$ ομομορφισμός ομάδων. Τότε ο f καθορίζεται από την εικόνα $f(a)$. Ο πυρήνας $Kerf =< a^r >$, κυκλική υποομάδα της G για κάποιον θετικό ακέραιο r, και η εικόνα $Imf =< f(a) >$ είναι μία κυκλική υποομάδα της G'. Αν, επιπλέον, $|G| = n$ και $n = rd$, τότε $|Kerf| = d$ και $|Imf| = r$.

Ας δούμε το πρώτο. Για $k \geq 0$ έχουμε: $f(a^k) = f(aa \cdots a \overset{f\ ομομ.}{=} f(a)f(a) \cdots f(a) = f(a)^k$. Για $k < 0$ έχουμε: $f(a^k) = f(a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1} \overset{f\ ομομ.}{=} f(a)^{-1}f(a)^{-1} \cdots f(a)^{-1} = (f(a)^{-1})^{-k} = f(a)^k$.

2. Εχουμε: $\phi(x) = [x]$, το ακέραιο μέρος του x. Τότε:
$\phi(x_1 + x_2) = [x_1 + x_2] \geq [x_1] + [x_2] = \phi(x_1) + \phi(x_2)$. Για παράδειγμα, $[3,6 + 1,7] = 5 > [3,6] + [1,7] = 4$. Αρα ϕ όχι ομομορφισμός.

3. Ο ϕ είναι ομομορφισμός διότι: $\phi(x_1x_2) = |x_1x_2| = |x_1||x_2| = \phi(x_1)\phi(x_2)$.

4. Εχουμε $\phi(\overline{0}) = \phi(\overline{2}) = \phi(\overline{4}) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_2$ και $\phi(\overline{1}) = \phi(\overline{3}) = \phi(\overline{5}) = \overline{1} \in \mathbb{Z}_2$.
Ο ϕ είναι ομομορφισμός διότι:

$\phi(\overline{i}) + \phi(\overline{j}) = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0} = \phi(\overline{i+j})$, αν i, j άρτιοι
$\phi(\overline{i}) + \phi(\overline{j}) = \overline{0} + \overline{1} = \overline{1} = \phi(\overline{i+j})$, αν i άρτιος, j περιττός
$\phi(\overline{i}) + \phi(\overline{j}) = \overline{1} + \overline{1} = \overline{0} = \phi(\overline{i+j})$, αν i, j περιττοί

5. Εχουμε $\phi(\overline{0}) = \phi(\overline{2}) = \phi(\overline{4}) = \phi(\overline{6}) = \phi(\overline{8}) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_2$ και
$\phi(\overline{1}) = \phi(\overline{3}) = \phi(\overline{5}) = \phi(\overline{7}) = \overline{1} \in \mathbb{Z}_2$. Ο ϕ δεν είναι ομομορφισμός διότι:
$\overline{0} = \phi(\overline{0}) = \phi(\overline{9}) = \phi(\overline{8+1}) \neq \phi(\overline{8}) + \phi(\overline{1}) = \overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$.

6. Ο $\phi(x) = 2^x$ είναι ομομορφισμός διότι:
$\phi(x_1 + x_2) = 2^{x_1+x_2} = 2^{x_1}2^{x_2} = \phi(x_1)\phi(x_2)$.

8. Ο $\phi(g) = g^{-1}$ δεν είναι ομομορφισμός διότι:
$\phi(g_1g_2) = (g_1g_2)^{-1} = (g_2)^{-1}(g_1)^{-1} \neq (g_1)^{-1}(g_2)^{-1}$ (εκτός εάν G αβελιανή).

13. Ο $\phi(A) = tr(A)$ είναι ομομορφισμός διότι:
$\phi(A+B) = tr(A+B) = tr(A) + tr(B) = \phi(A) + \phi(B)$.

18. Εστω ομομορφισμός $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Εφόσον $Imf \leq \mathbb{Z}$, η εικόνα θα είναι της μορφής $Imf = n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Για να είναι ο f επί του $\mathbb{Z}$, θα πρέπει $Imf = \mathbb{Z} =< +1 >=< -1 >$, άρα $n = +1$ ή $n = -1$. Αρα υπάρχουν δύο επιμορφισμοί του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}$: Ο f_1, με $f_1(1) = 1$, δηλαδή η ταυτοτική απεικόνιση, και ο f_2, με $f_2(1) = -1$, που απεικονίζει κάθε ακέραιο στον αντίθετό του.

19. Οπως στην Ασκηση 18, για έναν ομομορφισμό $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ θα είναι $Imf = n\mathbb{Z} =< n >= \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Αρα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ένας ομομορφισμός $f_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, ο οποίος καθορίζεται από το $f_n(1) = n$. (Τότε $f(k) = nk$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.)

20. Επειδή $\mathbb{Z} =< +1 >$ και ο f καθορίζεται από την εικόνα $f(1)$ (τότε $f(x) = xf(1) \in \mathbb{Z}_2$), θα είναι είτε $f(1) = \overline{0}$ είτε $f(1) = \overline{1}$. Αρα υπάρχουν δύο ομομορφισμοί του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}_2$: Ο τετριμμένος και εκείνος που απεικονίζει τους περιττούς στο $\overline{1}$ και τους άρτιους στο $\overline{0}$.

21. <u>α' τρόπος</u>: Θα πρέπει $\phi_g(e) = e$. Ομως $\phi_g(e) = ge = g$. Αρα ϕ_g ομομορφισμός μόνο για $g = e$, δηλαδή ο ταυτοτικός.
<u>β' τρόπος</u>: Εστω $x, y \in G$. Θα πρέπει $\phi_g(xy) = \phi_g(x)\phi_g(y) \iff g(xy) = (gx)(gy) \overset{N.\,\Delta\iota\alpha\gamma\rho.}{\iff} g = e$, δηλαδή ο ταυτοτικός.
<u>Παρατήρηση</u>: Η ϕ_g είναι 1-1 για κάθε $g \in G$.

22. Θα πρέπει $\phi_g(xy) = \phi_g(x)\phi_g(y)$. Εχουμε: $\phi_g(xy) = g(xy)g^{-1} = gxeyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = \phi_g(x)\phi_g(y)$. Αρα ϕ_g ομομορφισμός για κάθε $g \in G$.

23. **ε)** Εστω $\phi : G \longrightarrow G'$. Εφόσον $|G| = 6$, θα είναι $|Ker\phi| = 1$ ή 2 ή 3 ή 6. Αν $|Ker\phi| = 6$ τότε $Im\phi = \{e'\} \Longrightarrow |Im\phi| = 1$, άτοπο, εφόσον έχει υποτεθεί $|Im\phi| = 4$. Αν $|Ker\phi| = 3$, από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ομομορφισμού, $|G/Ker\phi| = 2 = |Im\phi|$, άτοπο, εφόσον $|Im\phi| = 4$. Ομοια απορρίπτονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

24. Εστω ότι υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$.
<u>α' τρόπος</u>: Εφόσον $\mathbb{Z}_{12} =< \overline{1} >$ και f ομομορφισμός, έπεται ότι ο f καθορίζεται από το $f(\overline{1})$, δηλαδή $f(\overline{k}) = kf(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_5$. Αν $f(\overline{1}) = \overline{0}$, τότε

$f(\overline{k}) = \overline{0}\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_{12}$, και άρα f τετριμμένος, άτοπο. Εστω $f(\overline{1}) = \overline{1} \in \mathbb{Z}_5$. Τότε $f(\overline{0}) = f(\overline{12}) = \overline{12} = \overline{2} \neq \overline{0}$, άτοπο (εφόσον πάντα $f(\overline{0}) = \overline{0}$). Ομοια, αν $f(\overline{1}) = \overline{2}$ ή $\overline{3}$ ή $\overline{4} \in \mathbb{Z}_5$.

β' τρόπος: Επειδή $Ker\, f \leq G$, θα έχουμε (από Θεώρημα Lagrange) ότι $|Ker f|\,|\,|G| = 12$. Αν $|Ker f| = 12$, τότε $Im f = \{e\}$, και άρα f τετριμμένος, άτοπο. Αν $|Ker f| = 6, 4, 3, 2$ αντίστοιχα, τότε (από Θεώρημα Ομομορφισμών) $|Im f| = 2, 3, 4, 6$ αντίστοιχα. Ομως $Im f \leq G$, άρα $|Im f|\,|\,5$, άτοπο.

25. Εστω $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ μη τετριμμένος ομομορφισμός. Εφόσον $\mathbb{Z}_{12} =< \overline{1} >$ και f ομομορφισμός, έπεται ότι $f(\overline{k}) = kf(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_4$. Εφόσον f μη τετριμμένος $f(\overline{1}) \neq \overline{0}$. Εστω $f(\overline{1}) = \overline{1} \in \mathbb{Z}_4$. Τότε $f(\overline{0}) = f(\overline{12}) = \overline{12} = \overline{0} \in \mathbb{Z}_4$ και ο f ορίζει ομομορφισμό. Εστω $f(\overline{1}) = \overline{2} \in \mathbb{Z}_4$. Τότε $f(\overline{0}) = f(\overline{12}) = \overline{24} = \overline{0} \in \mathbb{Z}_4$ και ο f ορίζει πάλι ομομορφισμό. Εστω, τέλος, $f(\overline{1}) = \overline{3} \in \mathbb{Z}_4$. Τότε $f(\overline{0}) = f(\overline{12}) = \overline{36} = \overline{0} \in \mathbb{Z}_4$ και ο f ορίζει επίσης ομομορφισμό.

27. Εστω $f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}$ μη τετριμμένος ομομορφισμός. Εφόσον $\mathbb{Z}_3 =< \overline{1} >$ και f ομομορφισμός, έπεται ότι ο f καθορίζεται από το $f(\overline{1})$, δηλαδή $f(\overline{n}) = nf(\overline{1})$. Εστω $f(\overline{1}) = k \in \mathbb{Z}$. Εφόσον f μη τετριμμένος, θα πρέπει $k \neq 0$. Τότε όμως $f(\overline{0}) = f(\overline{3}) = 3k \neq 0$, άτοπο.

28. Ζητάμε μη τετριμμένο ομομορφισμό $\phi : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow S_3$. Εφόσον $\mathbb{Z}_3 =< \overline{1} >$ και ϕ ομομορφισμός, έπεται ότι ο ϕ καθορίζεται από το $\phi(\overline{1})$, δηλαδή $\phi(\overline{k}) = \phi(\overline{1})^k$. Κι εφόσον ϕ μη τετριμμένος, θα πρέπει $\phi(\overline{1}) \neq id$. Παρατηρούμε τώρα ότι η εναλλάσσουσα υποομάδα $A_3 = \{id, (123), (132)\}$ της S_3 είναι κυκλική: $A_3 =< (123) >\}$. Οπότε, ορίζοντας $\phi(\overline{1}) = (123)$ (έπεται $\phi(\overline{2}) = (132)$ και $\phi(\overline{0}) = id$), έχουμε ότι ϕ ομομορφισμός.

29. Ζητάμε μη τετριμμένο ομομορφισμό $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow S_3$. Ορίζουμε $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$, έτσι ώστε $f(k) = \overline{k}$. Ο f είναι ομομορφισμός προσθετικών ομάδων. Στη συνέχεια ορίζουμε $\theta = \phi \circ f$, όπου ϕ ο ομομορφισμός της Ασκησης 28. Ο θ είναι ομομορφισμός, ως σύνθεση ομομορφισμών, και είναι μη τετριμμένος.

32. Ζητάμε μη τετριμμένο ομομορφισμό $\rho : D_4 \longrightarrow S_3$.

Παρατηρούμε ότι η ομάδα D_4 παράγεται από μία ανάκλαση, έστω την a, και μία στροφή στο επίπεδο, την r, δηλαδή η D_4 έχει την παράσταση: $D_4 =< a, r \mid a^2 = e, r^4 = e >$. Απεικονίζουμε κατ' αρχάς την D_4 στην ομάδα $\mathbb{Z}_2$, μέσω ενός ομομορφισμού ϵ, τέτοιου ώστε $\epsilon(r) = \overline{0}$ και $\epsilon(a) = \overline{1}$. Στη συνέχεια

απεικονίζουμε την $\mathbb{Z}_2$ στην S_3 μέσω του ομομορφισμού s, έτσι ώστε $s(\overline{0}) = id$ και $s(\overline{1}) = (12)$. Τότε, η σύνθεση $s \circ \epsilon$ είναι ένας μη τετριμμένος ομομορφισμός.

33. Ζητάμε μη τετριμμένο ομομορφισμό $\phi : S_3 \longrightarrow S_4$. Πράγματι, η ταυτοτική απεικόνιση id είναι ένας μη τετριμμένος (1-1, όχι επί) ομομορφισμός.

34. Ζητάμε μη τετριμμένο ομομορφισμό $\phi : S_4 \longrightarrow S_3$. Πράγματι, απεικονίζουμε κατ' αρχάς την S_4 στην πολλαπλασιαστική ομάδα $\{+1, -1\}$, μέσω του ομομορφισμού $sign$, που την κάθε μετάθεση $\sigma \in S_4$ την αντιστοιχεί στο πρόσημό της $sign(\sigma)$. Η $\{+1, -1\}$ είναι ισομορφική με την $\mathbb{Z}_2$ (αντιστοιχούμε το $+1$ στο $\overline{0}$ και το -1 στο $\overline{0}$). Στη συνέχεια απεικονίζουμε την $\mathbb{Z}_2$ στην S_3 μέσω του ομομορφισμού s της Ασκησης 32. Η σύνθεση είναι ένας μη τετριμμένος ομομορφισμός.

Παρατήρηση: Γενικά για $n \geq 5$, *η μόνη κανονική υποομάδα της* S_n *είναι η* A_n, άρα ο μόνος μη τετριμμένος ομομορφισμός είναι το πρόσημο $sign : S_n \longrightarrow \{+1, -1\}$, που έχει πυρήνα $Ker(sign) = A_n$.

Αλλες ασκήσεις:

1) Η απεικόνιση $det : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι επιμορφισμός ομάδων, διότι: $det(AB) = det(A)det(B)$. Ο πυρήνας $Ker(det) = sl_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid detA = 1\}$.

2) Βρείτε έναν 1-1 ομομορφισμό $f : D_4 \longrightarrow S_4$.

Δείτε το Παράδειγμα 5, σελ. 79, όπου αντιστοιχεί συμμετρίες της D_4 σε μεταθέσεις της S_4, σύμφωνα με την επίδραση κάθε συμμετρίας στις θέσεις των τεσσάρων κορυφών. Το σύνολο αυτών των οκτώ μεταθέσεων είναι υποομάδα της S_4 και η αντιστοίχιση είναι ομομορφισμός.

3) Γενικεύσατε την παραπάνω άσκηση σε 1-1 ομομορφισμό $f : D_n \longrightarrow S_n$.

4) Βρείτε έναν 1-1 ομομορφισμό $f : V_4 \longrightarrow S_4$.

Οπως στην Ασκηση 3), δείτε πάλι το Παράδειγμα 5, σελ. 79, όπου αντιστοιχεί συμμετρίες του τετραγώνου σε οκτώ μεταθέσεις της S_4. Το παραλληλόγραμμο έχει μόνο τέσσερεις συμμετρίες, γι' αυτό περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $\{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} = V_4$. Το σύνολο αυτών των τεσσάρων μεταθέσεων είναι υποομάδα της S_4 και η αντιστοίχιση είναι ομομορφισμός.

5) Η απεικόνιση $\phi : (\mathbb{Z}_6, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_3, +)$ με $\phi(\overline{x}) =$ η κλάση (modulo 3) του υπολοίπου της διαίρεσης του x δια 3 είναι επιμορφισμός ομάδων. Πράγματι: $\phi(\overline{0}) = \phi(\overline{3}) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_3$, $\phi(\overline{1}) = \phi(\overline{4}) = \overline{1} \in \mathbb{Z}_3$ και $\phi(\overline{2}) = \phi(\overline{5}) = \overline{2} \in \mathbb{Z}_3$, και για κάθε επιλογή στοιχείων $\overline{i}, \overline{j} \in \mathbb{Z}_6$ ισχύει $\phi(\overline{i}) + \phi(\overline{j}) = \phi(\overline{i+j})$. (Σύγκρινε με Ασκηση 4.)

6) Η απεικόνιση $\phi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$, τέτοια ώστε $\phi(x) =$ η κλάση (modulo n) του υπολοίπου της διαίρεσης του x δια n, δηλαδή:

$$\phi(x) = \overline{x \bmod n} = \overline{x} \in \mathbb{Z}_n$$

είναι επιμορφισμός ομάδων. Πράγματι:
Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ με $x_1 = q_1 n + r_1$ και $x_2 = q_2 n + r_2$, όπου $0 \leq r_1, r_2 < n$. Τότε $\phi(x_1 + x_2) = \phi(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2) \bmod n = r_1 \bmod n + r_2 \bmod n = \phi(x_1) + \phi(x_2)$.
Ο πυρήνας $Ker\phi = \{\lambda n \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Εφόσον $\mathbb{Z} =< 1 >$, αν : $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ ομομορφισμός, έπεται ότι ο f καθορίζεται από την εικόνα του 1, δηλαδή $f(x) = xf(1) \in \mathbb{Z}_n$. Μ' αυτό το σκεπτικό, ο παραπάνω ομομορφισμός ϕ καθορίζεται από την

$$\phi(1) = \overline{1} \in \mathbb{Z}_n$$

Πράγματι, τότε: $\phi(x) = x\phi(1) = x\overline{1} = \overline{x} \in \mathbb{Z}_n$.

7) Εστω η απεικόνιση $\phi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$, η οποία ορίζεται μέσω της:

$$\phi(1) = \overline{k} \in \mathbb{Z}_n$$

για $\overline{k} \neq \overline{1}, \overline{0}$. Πότε είναι η ϕ ομομορφισμός;

8) Ας προσπαθήσουμε να ανακεφαλαιώσουμε και να γενικεύσουμε ό,τι μάθαμε για ομομορφισμούς κυκλικών ομάδων (Ασκήσεις βιβλίου 4, 5, 24, 25, 27, και οι παραπάνω).

Εστω η απεικόνιση $\phi : (\mathbb{Z}_m, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ και έστω

$$|Ker\phi| = d,$$

όπου $m = dr$ (εφόσον $Ker\phi \leq \mathbb{Z}_m$). Για να είναι η ϕ ομομορφισμός θα πρέπει, από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ομομορφισμού ($G/Ker\phi \cong Im\phi$), να ισχύει

$$|Im\phi| = |\mathbb{Z}_m / Ker\phi| = r.$$

Κι εφόσον $Im\phi \leq \mathbb{Z}_n$, θα πρέπει ο r να διαιρεί και τον n. Αρα, για $r \neq 1$, θα πρέπει $(m, n) \neq 1$.

Στην ακραία περίπτωση όπου $d = m$ είναι $Im\phi = \{\overline{0}\}$ και πρόκειται πάντα για τον τετριμμένο ομομορφισμό. Στην ακραία περίπτωση όπου $d = 1$ είναι $Ker\phi = \{\overline{0}\}$ και άρα ϕ 1-1. Τότε θα πρέπει ο m να διαιρεί τον n.

Ισχύει και το αντίστροφο: αν $m = dr$ και $n = rs$, υπάρχει υποομάδα H της $\mathbb{Z}_m$ τάξης d και υποομάδα N της $\mathbb{Z}_n$ τάξης r (εφόσον $\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}_n$ κυκλικές). Η N είναι κυκλική (ως υποομάδα κυκλικής), άρα θα είναι ισομορφική με την $\mathbb{Z}_r$. Από την άλλη, τα r σύμπλοκα της H αποτελούν ομάδα τάξης r, την ομάδα-πηλίκο $\mathbb{Z}_m/H$, η οποία είναι επίσης κυκλική (γιατί;), άρα ισομορφική με την $\mathbb{Z}_r$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ισομορφισμούς:
$f : \mathbb{Z}_m/H \longrightarrow \mathbb{Z}_r$ και $g : N \longrightarrow \mathbb{Z}_r$. Τότε $g^{-1} \circ f : \mathbb{Z}_m/H \longrightarrow N$ είναι ισομορφισμός. Τέλος, θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό $\gamma : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m/H$, που ορίζεται μέσω της $\gamma(\overline{x}) = \overline{x} + H$ (βλ. σελ. 168). (Θυμηθείτε ότι $(x_1 + H) + (x_2 + H) = (x_1 + x_2) + H$.)Τότε ο

$$\phi =: g^{-1} \circ f \circ \gamma : (\mathbb{Z}_m, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$$

έτσι ώστε $\phi(\overline{x}) = g^{-1} \circ f(x + H)$ είναι ομομορφισμός με $Ker\phi = H$ και $Im\phi = N$. Αρα:

$$\exists \text{ μη τετριμμένος ομομορφισμός } \phi : (\mathbb{Z}_m, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +) \Longleftrightarrow (m, n) \neq 1$$

Τέλος, έστω ομομορφισμός $\phi : (\mathbb{Z}_m, +) \longrightarrow (G, *)$. Εφόσον $Im\phi =< \phi(\overline{1}) >$, κυκλική υποομάδα της G, για να υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός, θα πρέπει η G να περιέχει μία κυκλική υποομάδα τάξης $r = m/|Ker\phi|$. (Βλ. για παράδειγμα Ασκηση 28.) Τότε $Im\phi \cong \mathbb{Z}_r$, και συνεχίζουμε την κατασκευή όπως προηγουμένως.

9) Εστω $(m, n) \neq 1$ και έστω η απεικόνιση $\phi : (\mathbb{Z}_m, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ με $\phi(\overline{x}) =$ η κλάση modulo n του υπολοίπου της διαίρεσης του x δια n, δηλαδή:

$$\phi(\overline{x}) = \overline{x \bmod n}$$

Πότε είναι ο ϕ ομομορφισμός;
<u>Προσοχή!</u> $x \bmod m \neq x \bmod n$, γι' αυτό δεν επιτρέπεται να γράψουμε $\phi(\overline{x}) = \overline{x} \in \mathbb{Z}_n$. (Ενώ αυτό ήταν δυνατό στην 3)).

Εφόσον $\mathbb{Z}_m =< \overline{1} >$, αν είναι ϕ ομομορφισμός, θα καθορίζεται από την εικόνα του $\overline{1}$, δηλαδή $\phi(\overline{x}) = xf(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_n$. Μ' αυτό το σκεπτικό, ο παραπάνω ϕ, αν είναι ομομορφισμός, θα καθορίζεται από την

$$\phi(\overline{1}) = \overline{1} \in \mathbb{Z}_n$$

Πράγματι, τότε: $\phi(x) = x\phi(1) = x\overline{1} = \overline{x} \in \mathbb{Z}_n$. Ομως τότε $Im\phi =< \overline{1} >= \mathbb{Z}_n$, και $|Im\phi|$ διαιρεί τον m. Αρα θα πρέπει $n|m$.

Σ. Λαμπροπούλου

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ του βιβλίου

ΣΕΜΦΕ, 5ο Εξάμηνο

§2.3 - ΟΜΑΔΕΣ - ΠΗΛΙΚΑ : Σελίδες 169 - 172

2. α′ τρόπος: $< 2 > \times < 2 >=$
$\{(0,0),(0,2),(0,4),(0,6),(0,8),(0,10),(2,0),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,10)\}$,
και άρα $| < 2 > \times < 2 > | = 12$. Επίσης, $|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}| = 48$. Αρα, από Θεώρημα Lagrange, έχουμε 4 σύμπλοκα.

β′ τρόπος: $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}) / (< 2 > \times < 2 >) \cong \mathbb{Z}_4 / < 2 > \times \mathbb{Z}_{12} / < 2 >= G$. Στον πρώτο παράγοντα, η κυκλική ομάδα $< 2 >= \{0,2\}$. Στον δεύτερο παράγοντα, η κυκλική ομάδα $< 2 >= \{0,2,4,6,8,10\}$. Αρα $[\mathbb{Z}_4 :< 2 >] = 2$ και $[\mathbb{Z}_{12} :< 2 >] = 2$. Αρα $|G| = 2 \cdot 2 = 4$ και $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

3. $< (2,1) >= \{(0,0),(2,1)\}$, και άρα $| < (2,1) > | = 2$. Επίσης, $|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2| = 8$. Αρα, από Θεώρημα Lagrange, έχουμε 4 σύμπλοκα.

4. $\{0\} \times \mathbb{Z}_5 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$, άρα $|\{0\} \times \mathbb{Z}_5| = 5$. Επίσης, $|\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5| = 15$. Αρα, από Θεώρημα Lagrange, έχουμε 3 σύμπλοκα.

6. $< (4,3) >= \{(4,3),(8,6),(0,9),(4,12),(8,15),(0,0)\}$, και άρα $| < (4,3) > | = 6$. Επίσης, $|\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_8| = 12 \cdot 8$. Αρα, από Θεώρημα Lagrange, έχουμε 16 σύμπλοκα.

9. $< 4 >= \{0,4,8\}$, άρα $5+ < 4 >= \{5,9,1\}(= 1+ < 4 >)$. Τώρα έχουμε:
$2(5+ < 4 >) = (5+ < 4 >) + (5+ < 4 >) = 10+ < 4 >= \{10,2,6\} \neq < 4 >$,
$3(5+ < 4 >) = (5+ < 4 >) + (5+ < 4 >) + (5+ < 4 >) = 3+ < 4 >= \{3,7,11\} \neq < 4 >$. Τέλος, $4(5+ < 4 >) = 8+ < 4 >= \{8,0,4\} = < 4 >$. Αρα η τάξη του συμπλόκου $5+ < 4 >$ στην ομάδα-πηλίκο $\frac{\mathbb{Z}_{12}}{<4>}$ είναι 4. (Προσοχή! η τάξη του στοιχείου 5 στην $\mathbb{Z}_{12}$ είναι 12. Παρατηρήστε ότι η τάξη του συμπλόκου του 5 *διαιρεί* την τάξη του στοιχείου 5.)

11. $< (1,1) >= \{(1,1),(2,2),(0,3),(1,4),(2,5),(0,0)\}$. Τώρα έχουμε:
$(2,1)+ < (1,1) >= \{(0,2),(1,3),(2,4),(0,5),(1,0),(2,1)\}$
$\neq < (1,1) >$, εφόσον $(2,1) \notin < (1,1) >$.
$2[(2,1)+ < (1,1) >] = (1,2)+ < (1,1) >= \{(2,3),(0,4),(1,5),(2,0),(0,1),(1,2)\}$

$\neq < (1,1) >$, εφόσον $(1,2) \notin < (1,1) >$.
$3[(2,1) + < (1,1) >] = (0,3) + < (1,1) > = \{(1,4),(2,5),(0,0),(1,1),(2,2),(0,3)\}$ $= < (1,1) >$, εφόσον $(0,3) \in < (1,1) >$. Αρα η τάξη του συμπλόκου είναι 3. (Παρατηρήστε ότι δεν χρειάστηκε να φτάσουμε στο στοιχείο $(0,0)$, μόνο *στο σύμπλοκο του* $(0,0)$.)

20. α′ τρόπος: Εχουμε $[S_n : A_n] = 2$. Αν $\sigma \in A_n$, δηλαδή σ άρτια, τότε $\sigma A_n = A_n = A_n \sigma$. Αν $\sigma \notin A_n$, δηλαδή σ περιττή, τότε $\sigma A_n = S_n \setminus A_n$, εφόσον τα σύμπλοκα της A_n είναι δύο κι εφόσον τα σύμπλοκα μιας υποομάδας διαμερίζουν την ομάδα. Ομοια έχουμε $A_n \sigma = S_n \setminus A_n$. Αρα, σε κάθε περίπτωση, δεξιά και αριστερά σύμπλοκά ταυτίζονται, άρα $A_n \lhd S_n$. (Βλέπε και Ασκηση 34, σελ. 117.)

β′ τρόπος: Η απεικόνιση $sign : S_n \longrightarrow \{+1, -1\}$, η οποία απεικονίζει κάθε μετάθεση στο πρόσημό της (βλ. Ασκηση 34, σελ. 143), είναι ομομορφισμός και $Ker(sign) = A_n$, εφόσον κάθε άρτια μετάθεση (και μόνον) έχει πρόσημο $+1$. Αρα $A_n \lhd S_n$.

21. α) Εχουμε δει (σελ. 132, Ασκηση 36) ότι η $T = \{a \in G \mid ord(a) < +\infty\}$ είναι υποομάδα της G. Από Κριτήριο Κανονικότητας, αρκεί ν.δ.ό. $g^{-1}ag \in T$ για κάθε $g \in G$, για κάθε $a \in T$. Ομως, η τάξη κάθε συζυγούς ενός στοιχείου ισούται με την τάξη του στοιχείου. Αρα $ord(g^{-1}ag) = ord(a)$, άρα $g^{-1}ag \in T$, και άρα T κανονική.

β) Για να είναι η G/T ελεύθερη στρέψης, θα πρέπει να μην περιέχει στοιχείο (δηλαδή σύμπλοκο) πεπερασμένης τάξης, εκτός από το ουδέτερο (το οποίο είναι η υποομάδα T). Εστω, λοιπόν, $ord(gT) = n$ για κάποιο $g \notin T$. Δηλαδή $(gT)^n = g^n T = T$. Ισοδύναμα, $g^n \in T$, άρα $(g^n)^k = g^{nk} = e$ για κάποιον θετικό ακέραιο k. Αυτό σημαίνει ότι $g \in T$, άτοπο.

25. Εστω $a \in G$. Εάν $a \in H$, τότε και $a^m \in H$, εφόσον $H \leq G$. Εστω τώρα $a \notin G$. Τότε $aH \neq H$. Η ομάδα-πηλίκο G/H είναι πεπερασμένης τάξης m. Αρα, από Θεώρημα Lagrange, η τάξη του συμπλόκου aH, έστω k, θα διαιρεί τον m. Επομένως, $(aH)^m = (aH)^k = H \Longleftrightarrow a^m H = H \Longleftrightarrow a^m \in H$.

26. Εστω $H_i \lhd G$ για $i \in I$, όπου I μία οικογένεια δεικτών, και έστω $h \in \cap_i H_i$. Ισοδύναμα, $h \in H_i \forall i \in I$. Εφόσον $H_i \lhd G$, από Κριτήριο Κανονικότητας, θα είναι $g^{-1}hg \in H_i$ για κάθε $g \in G$ και για κάθε $i \in I$. Αρα $g^{-1}hg \in \cap_i H_i$, και άρα, πάλι από Κριτήριο Κανονικότητας, $\cap_i H_i \lhd G$.

29. Εστω $H, N \leq G$ και $N \lhd G$. Θ.δ.ό. $H \cap N \lhd H$. Εστω $v \in H \cap N$ και $h \in H$. Εφόσον $N \lhd G$, θα είναι, από Κριτήριο Κανονικότητας, $h^{-1}vh \in N$. Επίσης $h^{-1}vh \in H$. Αρα $h^{-1}vh \in H \cap N$ για κάθε $v \in H \cap N$, για κάθε $h \in H$. Αρα, από Κριτήριο Κανονικότητας, $H \cap N \lhd H$.

<u>Ομως η $H \cap N$ μπορεί να μην είναι κανονική στην G.</u>

Π.χ.1) Εστω $H \leq G$ όχι κανονική, και έστω $N = G$. Τότε $H \cap N = H$ όχι κανονική υποομάδα της G.
Π.χ.2) Εστω $G = S_4$, $N = A_4$, $H = \{e, (123), (132)\}$. Τότε $H \cap N = H$ όχι κανονική υποομάδα της S_4, εφόσον $(34)^{-1}(123)(34) = (124) \notin H$.

<u>Αλλες ασκήσεις:</u>

1) Εχουμε δει (Φυλλάδιο §2.1) ότι η απεικόνιση $\phi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ με $\phi(k) = \overline{k} := k \bmod n$ είναι επιμορφισμός ομάδων με $Ker\phi = \{\lambda n \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$, και έχουμε $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

2) Στο Παράδειγμα 2, σελ. 111, μελετήθηκε η ομάδα των συμπλόκων της υποομάδας $H =< \overline{3} >$ της $\mathbb{Z}_6$. Αρα $|\mathbb{Z}_6/ < 3 > | = 2 \Longrightarrow \mathbb{Z}_6/ < 3 > \cong \mathbb{Z}_2$. Ενας ομομορφισμός ϕ, που να έχει την $< 3 >$ για πυρήνα, είναι ο $\phi : (\mathbb{Z}_6, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$ με $\phi(\overline{x}) =$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του x δια 2.

3) Εχουμε δει (Φυλλάδιο §2.1) ότι η απεικόνιση $det : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι επιμορφισμός ομάδων με $Ker(det) = sl_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid detA = 1\}$. Αρα $sl_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$.

4) Δείξτε ότι $GL_n(\mathbb{R})/sl_n(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Σ. Λαμπροπούλου

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ του βιβλίου

ΣΕΜΦΕ, 5ο Εξάμηνο

§2.4 - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΟΜΑΔΩΝ - ΠΗΛΙΚΩΝ : Σελίδες 180 - 184

23. Εχουμε $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ και $U_n =< z_n = cos(\frac{2\pi}{n}) + i\, sin(\frac{2\pi}{n}) >= \{z_n^k \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$. Προφανώς $U_n \triangleleft U$. Τα σύμπλοκα της U/U_n είναι της μορφής:

$$zU_n = \{zz_n^k \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$$

για $z \in U$. Ομως $z = e^{i\theta}$, όπου $0 \leq \theta < 2\pi$. Αν $\theta \geq \frac{2\pi}{n}$, τότε υπάρχει $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, τέτοιο ώστε $z = z_n^k e^{i\phi}$, για $0 \leq \phi < \frac{2\pi}{n}$. Αρα $zU_n = z_n^k e^{i\phi} U_n = e^{i\phi} U_n$. Αρα, ένα σύνολο εκπροσώπων των συμπλόκων είναι το $z = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < \frac{2\pi}{n}\}$. Γεωμετρικά, το σύμπλοκο του στοιχείου $e^{i\phi}$ αποτελείται από n σημεία στον τριγωνομετρικό κύκλο, κορυφές κανονικού n-γώνου, τα οποία είναι μεταφορές των σημείων της U_n κατά γωνία ϕ.

28. Εστω $\phi : G \longrightarrow G'$ ομομορφισμός και έστω $N \triangleleft G$. Θ.δ.ό. η $\phi(N)$ είναι κανονική υποομάδα της εικόνας $\phi(G)$. Πράγματι, έστω $g \in G$ και $v \in N$. Τότε $\phi(g) \in \phi(G)$ και $\phi(v) \in \phi(N)$, και έχουμε: $\phi(g)^{-1}\phi(v)\phi(g) \overset{\phi\ ομομ.}{=} \phi(g^{-1})\phi(v)\phi(g) \overset{\phi\ ομομ.}{=} \phi(g^{-1}vg) \in \phi(N)$, διότι $g^{-1}vg \in N$ (εφόσον $v \in N \triangleleft G$). Αρα, από Κριτήριο Κανονικότητας, $\phi(N) \triangleleft \phi(G)$.

<u>Προσοχή!</u> Η $\phi(N)$ δεν έπεται ότι είναι κανονική υποομάδα και ολόκληρης της G'.

29. Εστω $\phi : G \longrightarrow G'$ ομομορφισμός και έστω $N' \triangleleft G'$. Θ.δ.ό. η αντίστροφη εικόνα $\phi^{-1}(N')$ είναι κανονική υποομάδα της G. Πράγματι, έστω $g \in G$ και $v \in \phi^{-1}(N') \Longleftrightarrow \phi(v) \in N'$.
Τότε έχουμε: $\phi(g^{-1}vg) \overset{\phi\ ομομ.}{=} \phi(g^{-1})\phi(v)\phi(g) \overset{\phi\ ομομ.}{=} \phi(g)^{-1}\phi(v)\phi(g) \in N'$, εφόσον $\phi(v) \in N' \triangleleft G'$. Αρα, από Κριτήριο Κανονικότητας, $\phi^{-1}(N') \triangleleft G$.

Σ. Λαμπροπούλου