# ΑΛΓΕΒΡΑ

**ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ** του βιβλίου

ΣΕΜΦΕ, 5ο Εξάμηνο

§1.3 - ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ : Σελίδες 67 - 71

**15.** $(G_1,+) =< +1 >=< -1 >$, $(G_4,+) =< +6 >=< -6 >$, $(G_5,\cdot) =< 6 >=< 6^{-1} >$. Οι υπόλοιπες δεν είναι κυκλικές. Η $(G_6,+)$ μπορεί να παρασταθεί από ένα πλέγμα στο επίπεδο $I\!R^2$, και οποιοδήποτε στοιχείο της παράγει μόνο μία "ευθεία".

**28.** i) Εστω $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$. Τότε $h_1k_1h_2k_2 \overset{G\ \alpha\beta\varepsilon\lambda.}{=} h_1h_2k_1k_2 \in HK$, εφόσον $h_1, h_2 \in H$ και $k_1, k_2 \in K$. ii) Εστω $hk \in HK$. Τότε $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \overset{G\ \alpha\beta\varepsilon\lambda.}{=} h^{-1}k^{-1} \in HK$. Από i), ii) έπεται ότι $HK$ υποομάδα.

**31.** Εστω $G =< a >$ και έστω $|G| = n$. Τότε $G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. Ομως η $G$ παράγεται και από οποιοδήποτε στοιχείο $a^k$ με $(k,n) = 1$. Από την άλλη, για κάθε $n \in I\!N$ έχουμε $(n, n-1) = 1$. Αρα υπάρχει πάντα άλλος ένας γεννήτορας, εκτός εάν $n = 2$. Αν $|G| = +\infty$ τότε σίγουρα και $G =< a^{-1} >$. Αρα, για να μην υπάρχει άλλος γεννήτορας για την $G$ θα πρέπει $a^{-1} = a$, ισοδύναμα $a^2 = e$. Αρα $|G| = 2$, άτοπο.

**32.** Εστω $a, b \in A$. Τότε $(ab)^2 = abab \overset{G\ \alpha\beta\varepsilon\lambda.}{=} aabb = a^2b^2 = ee = e$. Αρα $ab \in A$. Επίσης, $(a^{-1})^2 = a^{-2} = (a^2)^{-1} = e^{-1} = e$. Αρα $a^{-1} \in A$. Επομένως $A \leq G$.

**33.** Εστω $a, b \in H$. Τότε $(ab)^n = abab\cdots ab \overset{G\ \alpha\beta\varepsilon\lambda.}{=} aa\cdots abb\cdots b = a^nb^n = ee = e$. Αρα $ab \in H$. Επίσης, $(a^{-1})^n = a^{-n} = (a^n)^{-1} = e^{-1} = e$. Αρα $a^{-1} \in H$. Επομένως $H \leq G$.

**35.** Αρκεί ν.δ.ό. η $H$ περιέχει το αντίστροφο κάθε στοιχείου της. Εστω $a \in H$. Τότε, λόγω κλειστότητας, θα είναι και $a^2, a^3, \ldots \in H$. Ομως $\{a, a^2, a^3, \ldots\}$ πεπερασμένο. Αρα υπάρχουν $i \neq j$ με $a^i = a^j$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $i > j$. Τότε $a^i = a^j \Longleftrightarrow a^{i-j} = e$. Ομως $a^{i-j} \in H$, άρα $e \in H$. Θεωρούμε τώρα το στοιχείο $a^{i-j-1}$. Είναι με $i - j - 1 \geq 0$, άρα $a^{i-j-1} \in H$, και $aa^{i-j-1} = e$. Αρα $a^{i-j-1} = a^{-1} \in H$.

**36.** Εστω $x, y \in H_a$. Τότε $(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy)$. Αρα $xy \in H_a$. Επίσης, $xa = ax \Longleftrightarrow ax^{-1} = x^{-1}a$. Αρα $x^{-1} \in H_a$. Επομένως $H_a \leq G$. Η $H_a$ λέγεται *κεντροποιούσα* υποομάδα του στοιχείου $a$.

**37.** Ομοια με την 36. Παρατηρήστε ότι η $H_a$ δεν είναι αναγκαστικά αβελιανή ομάδα. Αντίθετα, το κέντρο της $G$, $Z(G) = \{x \in G \mid xa = ax \; \forall \, a \in G\}$, είναι αβελιανή, διότι $xy = yx$ για κάθε $x \in Z(G), y \in G$, άρα και για $y \in Z(G)$.

Παρατηρήσεις: 1) Για το κέντρο της $G$ ισχύει: $Z(G) = \cap_{a \in G} H_a$.
2) Αν για κάποιο $a \in G$ είναι $H_a = G$, τότε $a \in Z(G)$.

**41.** Προφανώς $e \in G_n$, και για $g \in G$ είναι και $g^{-1} \in G_n$ (εφόσον $g^{-1} \in G$). Για $g_1^n, g_2^n \in G_n$, θα πρέπει να ισχύει $g_1^n g_2^n \in G_n$. Δηλαδή, θα πρέπει να υπάρχει $g \in G$, έτσι ώστε $g^n = g_1^n g_2^n$. Αυτό θα ήταν άμεσο αν $G$ αβελιανή.

**42.** Εστω $G$ όχι κυκλική και έστω $a \in G$. Τότε $ord(a) \neq |G|$, διαφορετικά θα είχαμε $< a >= G$, άτοπο. Αρα $ord(a) \mid |G|$ και άρα η $< a >$ είναι μία γνήσια, μη τετριμμένη υποομάδα της $G$, άτοπο.

Σ. Λαμπροπούλου

# ΑΛΓΕΒΡΑ

**ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ του βιβλίου**

ΣΕΜΦΕ, 5ο Εξάμηνο

§1.4 - ΟΜΑΔΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ : Σελίδες 81 - 85

**29.** Το σύνολο $\Sigma_1 = \{\sigma \in S_A \mid \sigma(b) = b\}$ είναι υποομάδα της $S_A$, διότι είναι κλειστό ως προς το γινόμενο μεταθέσεων και ως προς το αντίστροφο στοιχείο.

**30.** Το σύνολο $\Sigma_2 = \{\sigma \in S_A \mid \sigma(b) \in B\}$ δεν είναι υποομάδα της $S_A$.
Αντιπαράδειγμα: Πάρτε το αντιπαράδειγμα της Ασκησης 31 και θεωρήστε $b = 1$. Η $\sigma^{-1} \notin \Sigma_2$.

**31.** Το σύνολο $\Sigma_3 = \{\sigma \in S_A \mid \sigma(B) \subseteq B\}$ δεν είναι υποομάδα της $S_A$.
Αντιπαράδειγμα: Εστω $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{Z}$ και έστω η μετάθεση $\sigma \in S_{\mathbb{Q}}$, που ορίζεται από τον τύπο $\sigma(r) = 2r\ \forall r \in \mathbb{Q}$. (Προφανώς η $\sigma$ είναι 1-1 και επί.) Τότε $\sigma(k) = 2k\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Ομως η $\sigma^{-1}$ θα επιστρέφει περιττούς ακέραιους σε μη ακέραιους, άρα $\sigma^{-1} \notin \Sigma_3$, και άρα $\Sigma_3$ όχι υποομάδα της $S_{\mathbb{Q}}$.

**32.** Το σύνολο $\Sigma_4 = \{\sigma \in S_A \mid \sigma(B) = B\}$ είναι υποομάδα της $S_A$, διότι ο περιορισμός της κάθε $\sigma \in \Sigma_4$ στο σύνολο $B$ ανήκει στο $S_B$.

**35.** Αρκεί να το δείξουμε για την $S_3$, εφόσον τα στοιχεία της εμφυτεύονται αμφιμονοσήμαντα σε στοιχεία της $S_n$ για κάθε $n \geq 3$. Στην $S_3$ έχουμε: $(12)(23) = (123)$, ενώ $(23)(12) = (132)$. Αρα $S_3$ όχι αβελιανή.

**36.** Η άσκηση αυτή μας λέει ότι η ομάδα $S_n$, για $n \geq 3$, είναι όσο πιο μη αντιμεταθετική γίνεται. Δηλαδή, ότι το κέντρο $Z_{S_n}$ της $S_n$ περιέχει μόνο ένα στοιχείο, την ταυτοτική μετάθεση: $Z_{S_n} = \{id\}$.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $\sigma \in Z_{S_n}$ με $\sigma \neq id$. Τότε θα υπάρχουν $a \neq b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $\sigma(a) = b$. Εφόσον $n \geq 3$, θα υπάρχει κάποιος $c \neq a,\ c \neq b$ στο $\{1, 2, \ldots, n\}$. Εστω $\tau = (bc)$. Τότε $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(a)$ και $\tau \circ \sigma = \tau(b) = c \neq a$. Αφού οι μεταθέσεις $\sigma \circ \tau$ και $\tau \circ \sigma$ διαφέρουν σε ένα σημείο, θα είναι διαφορετικές. Αρα $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$, άτοπο, εφόσον $\sigma \neq id$ είχε υποτεθεί στο κέντρο της $S_n$.

**39.** Εστω $A = \{1, 2, \ldots, n\}$και έστω ο κύκλος $\sigma = (1\,2 \cdots n) \in S_A$ μήκους $n$. Τότε η τάξη του $\sigma$ είναι $n$. Θεωρούμε τώρα την κυκλική υποομάδα $H =< \sigma >$. Είναι $|H| = n$ και η $H$ είναι μεταβατική στο $A$. Πράγματι: έστω $a, b \in A$. Τότε υπάρχει $k \geq 0$ με $a + k \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$ και είναι $\sigma^k(a) = b$.

Σ. Λαμπροπούλου

# ΑΛΓΕΒΡΑ

**ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ** του βιβλίου

ΣΕΜΦΕ, 5ο Εξάμηνο

## §1.5 - ΤΡΟΧΙΕΣ, ΚΥΚΛΟΙ, Η ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΥΣΑ ΟΜΑΔΑ : Σελίδες 94 - 96

**2.** $\{1,5,7,8\}$, $\{2,3,6\}$, $\{4\}$.

**4.** $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{Z}$.

**5.** $\{\ldots,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\} = 2\mathbb{Z}$, $\{\ldots,-3,-1,1,3,5,\ldots\} = 2\mathbb{Z}+1$.

**6.** $\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\} = 3\mathbb{Z}$, $\{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\} = 3\mathbb{Z}+1$,
$\{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\} = 3\mathbb{Z}+2$.

**7.** $(145)(78)(257) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 8 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (145872)$.

**9.** $(12)(478)(21)(72815) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (158)(247)$.

**10.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (18)(364)(57) == (18)(34)(36)(57)$.

**11.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (134)(26)(587) == (14)(13)(26)(57)(58)$.

**12.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (13478652) == (12)(15)(16)(18)(17)(14)(13)$.

**13.** **δ)** Λάθος: Εστω, για παράδειγμα, $G =< (1234) >=< (14)(13)(12) >$. Τότε $(1234)^2 = (13)(24)$, $(1234)^3 = (1432)$, $(1234)^4 = id$. Αρα $G = \{(14)(13)(12),(13)(24),id\}$, και δεν περιέχει καμμία αντιμετάθεση.
**στ)** Σωστό για $n > 1$.
**ζ)** Σωστό: $|A_3| = \frac{6!}{2} = 3$, άρα $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$, και άρα $A_3$ αβελιανή.
**η)** Σωστό.
**θ)** Σωστό.

**14.** $S_3 = \{\rho_0 = id,\ \rho_1 = (123) = (13)(12),\ \rho_2 = (132) = (12)(13),\ t_1 = (23),\ t_2 = (13),\ t_3 = (12)\}$. Αρα $A_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$. Ο πίνακας της $A_3$ είναι ο:

| $\cdot$ | $\rho_0$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ |
|---|---|---|---|
| $\rho_0$ | $\rho_0$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ |
| $\rho_1$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\rho_0$ |
| $\rho_2$ | $\rho_2$ | $\rho_0$ | $\rho_1$ |

**15.** **α)** $(1457)^2 = (15)(47)$, $(1457)^3 = (1754)$, άρα $ord(1457) = 4$.
**β)** Η τάξη ενός κύκλου μήκους $\lambda$ είναι $\lambda$.
**γ)** Η τάξη της $\sigma$ είναι 6, το ΕΚΠ των μηκών των ξένων κύκλων. Ομοια, η τάξη της $\tau$ είναι 4.
**δ)** Η τάξη της μετάθεσης της Ασκησης 10 είναι 6, αυτής της Ασκησης 11 είναι 6 και αυτής της Ασκησης 12 είναι 8.
**ε)** Εστω $\sigma \in S_n$ εκφρασμένη σε γινόμενο ξένων κύκλων. Η τάξη της $\sigma$ είναι το ΕΚΠ των μηκών όλων των κύκλων της.

**18.** Εστω ότι η $H$ δεν περιέχει μόνο άρτιες μεταθέσεις, και έστω $\tau \in H$ μία περιττή μετάθεση. Εφόσον $H \leq G$, θα είναι $\tau\sigma \in H$ για κάθε $\sigma \in H$, και άρα η απεικόνιση $\lambda_\tau : H \longrightarrow H$ με $\lambda_\tau(\sigma) = \tau\sigma$ είναι καλά ορισμένη. Η $\lambda_\tau$ είναι επίσης 1-1 (από Νόμο Διαγραφής), άρα και επί (εφόσον $S_n$ πεπερασμένη), και απεικονίζει άρτιες μεταθέσεις σε περιττές και περιττές σε άρτιες (οι $\sigma$ και $\tau\sigma$ δεν είναι ισότιμες). Αρα οι άρτιες και οι περιττές είναι ίσου πλήθους.

**19.** Μετακινούνται $n$.

**20.** i) Εστω $B$ το πεπερασμένο σύνολο με $\kappa$ στοιχεία, τα οποία μετακινεί η $\sigma$ και εστω $\Gamma$ το πεπερασμένο σύνολο με $\lambda$ στοιχεία, τα οποία μετακινεί η $\tau$. Τότε, $\sigma\tau(i) = i$ για κάθε $i \in A \setminus (B \cup \Gamma)$, άρα η $\sigma\tau$ μετακινεί το πολύ $\kappa + \lambda$ στοιχεία, και άρα $\sigma\tau \in H$. ii) Εστω τώρα $i \in A \setminus B$, δηλαδή $\sigma(i) = i$. Ισοδύναμα ($\sigma$ 1-1): $\sigma^{-1}(i) = i$, άρα $\sigma^{-1} \in H$. Από i), ii) έπεται ότι $H$ υποομάδα.

**23.** Εστω $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_{2k+1})$. Τότε

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} \\ a_3 & a_4 & \dots & a_{2k+1} & a_1 & a_2 \end{pmatrix},$$

ισοδύναμα: $\sigma^2 = (a_1 a_3 \cdots a_{2k-1} a_{2k+1} a_2 a_4 \cdots a_{2k})$. Δηλαδή, η $\sigma^2$ είναι κύκλος, διότι: πρώτα εξαντλούνται τα στοιχεία με περιττούς δείκτες και εν συνεχεία

το τελευταίο (το $a_{2k+1}$) συνδέεται με το πρώτο στοιχείο άρτιου δείκτη (το $a_2$), οπότε και εξαντλούνται και όλα τα στοιχεία άρτιου δείκτη. Και τότε, το τελευταίο από αυτά (το $a_{2k}$) επιστρέφει στο $a_1$. Π.χ. $(12345)^2 = (13524)$.

**24.** Αν $\sigma$ κύκλος περιττού μήκους $n$, τότε η $\sigma^r$ είναι κύκλος αν και μόνον αν $(n, r) = 1$.

<u>Αλλες ασκήσεις</u>:

**1)** Εστω $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_k$ η ανάλυση μιάς μετάθεσης $\sigma \in S_n$ σε ξένους κύκλους με μήκη $r_1, r_2, \ldots, r_k$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι η $\sigma^{-1}$ αναλύεται επίσης σε $k$ ξένους κύκλους με μήκη $r_1, r_2, \ldots, r_k$.

**2)** Εστω κύκλος $c = (a_1\, a_2 \ldots a_k) \in S_n$. Δείξτε ότι $c = (a_1\, a_2)(a_2\, a_3) \cdots (a_{k-1} a_k) = (a_1\, a_k)(a_1\, a_{k-1}) \cdots (a_1 a_2) = (a_k\, a_{k-1})(a_k\, a_{k-2}) \cdots (a_k\, a_1)$.

**3)** Δείξτε ότι η υποομάδα $A_3$ είναι ισομορφική με την $\mathbb{Z}_3$.

Πράγματι, έχουμε: $A_3 = \{id, (123), (132)\}$.

<u>$\alpha'$ τρόπος</u>: Ορίζουμε $\phi : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow A_3$ μέσω των: $\phi(\overline{0}) = id$, $\phi(\overline{1}) = (123)$, $\phi(\overline{2}) = (132)$, και έχουμε: $\phi(\overline{1} + \overline{1}) = (123)(123) = (132) = \phi(\overline{2})$, $\phi(\overline{1} + \overline{2}) = (123)(132) = id = \phi(\overline{0})$, $\phi(\overline{2} + \overline{2}) = (132)(132) = (123) = \phi(\overline{1})$. Αρα $\phi$ ομομορφισμός. Επίσης, ο $\phi$ είναι προφανώς 1-1 και επί. Αρα ισομορφισμός.

Τι θα γινόταν αν ορίζαμε $\phi(\overline{1}) = (132)$;

<u>$\beta'$ τρόπος</u>: Παρατηρούμε ότι $(123)^2 = (132)$. Επίσης, ο κύκλος $(123)$ έχει μήκος 3, άρα $(123)^3 = id$. Αρα $A_3 =< (123) >$. Κι εφόσον υπάρχει μόνο μία δομή ομάδων με 3 στοιχεία, θα είναι $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$.

**4)** Βρείτε τη δομή της $A_4$.

Εχουμε δει (Ασκηση , σελ. ) ότι υπάρχουν 2 διαφορετικές δομές ομάδων με 6 στοιχεία. Η κυκλική και η ....

**5)** Εστω κύκλος $\sigma = (a_1\, a_2 \cdots a_k)$. Δείξτε ότι:
(i) Για κάθε $\xi \in S_n$ είναι $\xi\sigma\xi^{-1} = (\xi(a_1)\, \xi(a_2) \cdots \xi(a_k))$, δηλαδή και $\xi\sigma\xi^{-1}$ κύκλος μήκους $k$.
(ii) Για τον κύκλο $\sigma$ υπάρχει $\xi \in S_n$ τέτοιο ώστε $\sigma = \xi(1\, 2 \cdots k)\xi^{-1}$.

(i) Πράγματι, έστω $\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \xi(1) & \xi(2) & \ldots & \xi(n) \end{pmatrix}$. Τότε:

$\xi\sigma\xi^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & a_1 & \dots & a_2 & \dots & a_k & \dots & n \\ \xi(1) & \xi(2) & \dots & \xi(a_1) & \dots & \xi(a_2) & \dots & \xi(a_k) & \dots & \xi(n) \end{pmatrix} (a_1\, a_2 \cdots a_k) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \xi(1) & \xi(2) & \dots & \xi(a_1) & \dots & \xi(a_2) & \dots & \xi(a_k) & \dots & \xi(n) \\ 1 & 2 & \dots & a_1 & \dots & a_2 & \dots & a_k & \dots & n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \xi(1) & \xi(2) & \dots & \xi(a_1) & \dots & \xi(a_2) & \dots & \xi(a_k) & \dots & \xi(n) \\ \xi(1) & \xi(2) & \dots & \xi(a_2) & \dots & \xi(a_3) & \dots & \xi(a_1) & \dots & \xi(n) \end{pmatrix} =$$

$$(\xi(a_1)\, \xi(a_2) \cdots \xi(a_k)).$$

Δηλαδή, η $\xi\sigma\xi^{-1}$ αφήνει αμετακίνητα όλα τα $\xi(i)$ για $i \neq a_1, a_2, \dots, a_k$, ενώ μεταθέτει κυκλικά τα $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Σ. Λαμπροπούλου

# ΑΛΓΕΒΡΑ

**ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ** του βιβλίου

ΣΕΜΦΕ, 5ο Εξάμηνο

§1.7 - ΣΥΜΠΛΟΚΑ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ LAGRANGE : Σελίδες 116 - 119

**23.** Θα δείξω ότι $gH = Hg$ για κάθε $g \in G$. Εστω $gh \in gH$. Τότε: $gh = (gh)(g^{-1}g) = (ghg^{-1})g = [(g^{-1})^{-1}h(g^{-1})]g \in Hg$, άρα $gH \subset Hg$. Ομοια, αν $hg \in Hg$, είναι $hg = g(g^{-1}hg) \in gH$, άρα $Hg \subset gH$. Αρα $gH = Hg$.

**24.** Εστω $gH = Hg$ για κάθε $g \in G$. Θ.δ.ό. $g^{-1}hg \in H$ για κάθε $h \in H$, για κάθε $g \in G$. Πράγματι, έστω $h \in H, g \in G$. Τότε $hg \in Hg = gH$, άρα υπάρχει $h' \in H$ τέτοιο ώστε $gh' = hg \Longleftrightarrow g^{-1}hg = h' \in H$.

**34.** <u>α' τρόπος</u>: Εστω $H \leq G$ με $[G : H] = 2$, και έστω $g \in G$. Αν $g \in H$, τότε $gH = H = Hg$. Εστω $g \notin H \Longleftrightarrow g \in G \setminus H$. Εφόσον τα σύμπλοκα της $H$ είναι δύο κι εφόσον τα σύμπλοκα μιας υποομάδας διαμερίζουν την ομάδα, θα είναι $gH = G \setminus H$. Ομοια, $Hg = G \setminus H$. Αρα, σε κάθε περίπτωση $Hg = gH$, δηλαδή τα δεξιά και τα αριστερά σύμπλοκα κάθε στοιχείου ταυτίζονται, και άρα $H \lhd G$.

<u>β' τρόπος</u>: Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : G \longrightarrow \{+1, -1\}$, τέτοια ώστε

$$\phi(g) = +1, \text{ αν } g \in H \quad \text{και} \quad \phi(g) = -1, \text{ αν } g \in G \setminus H$$

Η $\phi$ είναι ομομορφισμός. Πράγματι:
• Αν $g_1, g_2 \in H$, τότε και $g_1g_2 \in H$ (εφόσον $H \leq G$ ). Αρα έχουμε:
$\phi(g_1g_2) = +1 = (+1)(+1) = \phi(g_1)\phi(g_2)$.
• Αν $g_1 \in H$, $g_2 \in G \setminus H$ τότε $g_1g_2 \in G \setminus H$ (διαφορετικά, αν υπήρχε $h \in H$ με $g_1g_2 = h$, θα ήταν $g_2 = g_1^{-1}h \in H$, άτοπο). Αρα έχουμε:
$\phi(g_1g_2) = -1 = (+1)(-1) = \phi(g_1)\phi(g_2)$.
• Αν $g_1, g_2 \in G \setminus H$ τότε $g_1g_2 \in H$. Πράγματι: $g_2 \in G \setminus H \Longleftrightarrow g_2^{-1} \in G \setminus H$ (διαφορετικά θα ήταν $g_2 \in H$). Αρα $Hg_1 = G \setminus H = Hg_2^{-1} \Longleftrightarrow g_1 \in Hg_2^{-1} \Longleftrightarrow \exists h \in H$, τέτοιο ώστε $g_1 = hg_2^{-1} \Longleftrightarrow g_1g_2 = h \in H$. Αρα έχουμε:
$\phi(g_1g_2) = +1 = (-1)(-1) = \phi(g_1)\phi(g_2)$.
Προφανώς, $Ker(\phi) = H$, και άρα $H \lhd G$. Κι εφόσον $[G : H] = 2$, θα είναι $G/H \cong \mathbb{Z}_2$.

Εφαρμογές:
1) Στις συμμετρίες κανονικού $n$-γώνου $N = \{e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\} \triangleleft D_n$.
2) $A_n \triangleleft S_n$ (βλέπε Ασκηση 20, σελ. 169).

**35.** Εστω $a \in G$. Θεωρούμε την υποομάδα $< a >= H$. Θα είναι $|H| = d$, διαιρέτης του $n$ (από Θεώρημα Lagrange). Αρα $a^d = e \Longrightarrow a^n = e$.

Αλλες ασκήσεις:

Σ. Λαμπροπούλου

# ΑΛΓΕΒΡΑ

**ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ** του βιβλίου

ΣΕΜΦΕ, 5ο Εξάμηνο

§1.8 - ΕΥΘΕΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΠΑΟ : Σελίδες 130 - 134

**16.** Εστω $H =< \overline{4}, \overline{6} >$ η υποομάδα της $\mathbb{Z}_{12}$ που παράγεται από τα στοιχεία $\overline{4}, \overline{6}$. Τότε και $\overline{6} - \overline{4} = \overline{2} \in H$, άρα $\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10} \in H$.
Ισχυρισμός: $H =< 2 >\cong \mathbb{Z}_6$. Πράγματι, αν η $H$ περιείχε κάποια περιττή κλάση $\overline{k}$, τότε $k+1$ άρτιος, άρα $\overline{k+1} \in H$. Συνεπώς $\overline{k+1} - \overline{k} \in H$ (εφόσον $H$ υποομάδα), άρα $\overline{1} \in H$ και άρα $H = \overline{1} = \mathbb{Z}_{12}$. Αν όμως ήταν $\overline{1} \in H =< \overline{4}, \overline{6} >$ θα έπρεπε να μπορούσε να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\overline{4}, \overline{6}$: $\overline{1} = \overline{a\overline{4} + b\overline{6}}$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$. Ομως τότε θα είχαμε στο $\mathbb{Z}$: $1 \equiv 4a + 6b (\mathrm{mod}\, 12)$, πού θα σήμαινε ότι $(4, 6) = 1$ (Θεώρημα Bezout), άτοπο.

**20.** Εστω $H =< (\overline{4}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{3}) >$. Τότε $2(\overline{4}, \overline{2}) = (\overline{8}, \overline{4}) = (\overline{2}, \overline{0}) \in H$, άρα (εφόσον $H$ υποομάδα) $(\overline{2}, \overline{0}), (\overline{4}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}) \in H$ **(i)**.
Επίσης, $3(\overline{4}, \overline{2}) = (\overline{12}, \overline{6}) = (\overline{0}, \overline{2}) \in H$. Αρα (εφόσον $H$ υποομάδα) και $(\overline{2}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{2}) = (\overline{2}, \overline{2}) \in H$. Ομως και $(\overline{2}, \overline{3}) \in H$, άρα $(\overline{2}, \overline{3}) - (\overline{2}, \overline{2}) = (\overline{0}, \overline{1}) \in H$, και άρα $\{0\} \times \mathbb{Z}_4 \leq H$ **(ii)**.
Τέλος, τα στοιχεία της $H$ είναι της μορφής $a(\overline{4}, \overline{2}) + b(\overline{2}, \overline{3}) = (4a + 2b, 2a + 3b) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$, απ' όπου βλέπουμε ότι $4a + 2b$ άρτιος **(iii)**.

Από (i), (ii), (iii) έπεται ότι:
$H = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{0}), (\overline{4}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{1}), (\overline{4}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{2}), (\overline{4}, \overline{2}), (\overline{0}, \overline{3}), (\overline{2}, \overline{3}), (\overline{4}, \overline{3})\}$.
Αρα $[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 : H] = 2$, και άρα τα δύο σύμπλοκα της $H$ είναι τα: $H$ και $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ (το δεύτερο περιέχει αντίστοιχα στοιχεία με την $H$, με πρώτο μέλος $1, 3, 5$.

**36.** i) Εστω $a, b \in T(G)$. Τότε υπάρχουν $r, s \in \mathbb{N}$ με $a^r = e = b^s$. Εστω $m = ΕΚΠ(r, s)$. Τότε $(ab)^m \overset{G\ \alpha\beta\varepsilon\lambda.}{=} a^m b^m = e$. Αρα $ab \in T(G)$. ii) Εστω $a \in T(G)$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ελάχιστος με $a^r = e$. Αρα $< a >= \{e, a, a^2, \ldots, a^{r-1}\}$, και έχουμε $aa^{r-1} = e$. Αρα $a^{r-1} = a^{-1}$. Ομως $(a^{r-1})^r = (a^r)^{r-1} = e$, άρα $a^{-1} \in T(G)$. Από i), ii) έπεται ότι $T(G)$ υποομάδα της $G$.

**37.** Η υποομάδα στρέψης της ομάδας $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$ είναι η $\mathbb{Z}_4 \times \{0\} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$, τάξης 12. Η υποομάδα στρέψης της ομάδας $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$ είναι η $\mathbb{Z}_{12} \times \{0\} \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$, τάξης $12^2$.

**38.** Η υποομάδα στρέψης της ομάδας $\mathbb{R}^*$ είναι το σύνολο:
$\{x \in \mathbb{R}^* \mid x^r = 1\} = \{+1, -1\}$.

**39.** Η υποομάδα στρέψης της ομάδας $\mathbb{C}^*$ είναι η:
$T = \cup_n U_n = \cup_n \{e^{\frac{i\,2\pi k}{n}},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{i\,2\pi \frac{p}{q}},\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\}$. ( Η $T$ δεν μπορεί να περιέχει στοιχεία μη μοναδιαίου μέτρου, ούτε και όλα τα στοιχεία του τριγωνομετρικού κύκλου $U$, διότι η $U$ περιέχει και στοιχεία με άρρητη γωνία, τα οποία έχουν άπειρη τάξη.)

Σ. Λαμπροπούλου