

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λ' Εξω $\underline{\underline{X}} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ε.δ. από την κατηγορία Γάμμα με παραμέτρους $\alpha > 0$, γνωστό υπό $\theta > 0$ άγνωστο. Να δειχθεί ότι:
η σ.σ. $T^*(\underline{\underline{X}}) = \frac{n\alpha - 1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ είναι A.O.E. ευπλήρωτα της παραμέτρου θ .

Άσων Η σ.π.π. της ε.ρ. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$ είναι:

$$f_X(x; \theta) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x}$$

Η από υπόνοια σ. π.π. του ε.δ. $\underline{\underline{X}}$ είναι:

$$\begin{aligned} f_{\underline{\underline{X}}}(\underline{\underline{x}}; \theta) &= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \right) \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \\ &= \exp \left\{ -\theta \sum_{i=1}^n x_i + \log \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \log \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Η } f_{\underline{\underline{X}}}(\underline{\underline{x}}; \theta) \in \text{ΜΕΟΚ} \text{ με } C(\theta) = -\theta, D(\underline{\underline{x}}) = \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$A(\theta) = \log \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}, \quad B(\underline{\underline{x}}) = \log \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \right)$$

Συγ. είναι της μορφής:

$$f_{\underline{\underline{X}}}(\underline{\underline{x}}; \theta) = \exp \left\{ A(\theta) + B(\underline{\underline{x}}) + C(\theta)D(\underline{\underline{x}}) \right\} \quad \forall \theta \in \Theta = (0, \infty)$$

To σημείο $S = \{ \underline{\underline{x}} : f(\underline{\underline{x}}; \theta) > 0 \}$ δεν εξαρτάται από την θ και το πεδίο εκπών της $C(\theta)$, το οποίο $(-\infty, 0)$ είναι προνόμιο ανοικτό υποσύνοδο του \mathbb{R} και συντούς η σ.σ. $T(\underline{\underline{x}}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι επικρίτικη παράμετρη για την θ . Επιτρέπουν, ωχύει ότι:

$$T \sim \text{Gamma}(n\alpha, \theta). \quad \text{Από } E[T^*(\underline{\underline{X}})] = E \left[\frac{n\alpha - 1}{T(\underline{\underline{X}})} \right]$$

'Όμως,

$$\mathbb{E}\left[\frac{n\alpha-\ell}{T(\underline{x})}\right] = \int_0^\infty \frac{n\alpha-\ell}{t} \frac{\theta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} t^{n\alpha-1} e^{-\theta t} dt$$

$$= \frac{n\alpha-\ell}{\Gamma(n\alpha)} \theta \int_0^\infty (\theta t)^{n\alpha-2} e^{-\theta t} \theta dt$$

$$= \frac{\theta(n\alpha-\ell)}{\Gamma(n\alpha)} = \theta$$

Συνεπώς, μ.σ.ο. $T^*(\underline{x}) = \frac{n\alpha-\ell}{\sum_{i=1}^n x_i}$ είναι αρερόγυμπη εκτιμήσεις για την θ και ως συνάρτηση της επιφύλωσης και πιθανώς μ.σ.ο.

$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι A.O.E.I. εκτιμήση της θ.

#2 Ο αριθμός των επεξφωνιών ιδιότευν που φθάνει σ' ένα επεξφωνιό ούτε πάντα ανά γεπτό είναι μία ε.μ. X που αντιτίθεται μετανομή Poisson(θ), $\theta > 0$. Να βρεθεί ο A.O.E.I. εκτιμητής της πιθανότητας να τη φθάσει καρίσματα επεξφωνιών ιδιότητα σε χρονικό διάστημα δύο γεπτών.

Άνω

Ο αριθμός των επεξφωνιών ιδιότευν που φθάνει σε ένα ούτε πάντα σε διάστημα 2 γεπτών είναι μία ε.μ. $Y \sim \text{Poisson}(2\theta)$

Ζητάμε τον AOEI εκτιμητή της πιθανότητας:

$$\mathbb{P}\{Y=0\} = e^{-2\theta} = g(\theta)$$

Από παραδείγματα των συρείσεων, σε.g. 20 και 29, μ.σ.ο.

$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι επιφύλωση και πιθανής γενετικής παράγετρος θ

Επιπλέον, $T \sim \text{Poisson}(n\theta)$! Εστω μ.σ.ο. $d(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_1 + X_2 = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

όπου $X_i, i=1, \dots, n$ τ.η. που αναπαριστά τα αριθμούς των τηλ. -3- καλύτερων ανά γενικότερό.

H τ.η. $X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(2\theta)$ και

$$E[d(\underline{X})] = 1 \cdot P\{X_1 + X_2 = 0\} = e^{-2\theta} \frac{(2\theta)^0}{0!} = e^{-2\theta}$$

H σ.η. $d(\underline{X})$ είναι αφερόγνωτη ευχρήστρα της $g(\theta) = e^{-2\theta}$.

Ο A.O.E.D. ευχρηστής θα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} d^*(\underline{X}) &= E[d(\underline{X}) | T(\underline{X}) = t] = P\left\{X_1 + X_2 = 0 \mid \sum_{i=1}^n X_i = t\right\} \\ &= \frac{P\left\{X_1 + X_2 = 0, \sum_{i=1}^n X_i = t\right\}}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} = \frac{P\{X_1 + X_2 = 0\} P\left(\sum_{i=3}^n X_i = t\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} \\ &= \frac{e^{-2\theta} \frac{e^{-(n-2)\theta} ((n-2)\theta)^t}{t!}}{\frac{e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^t}{t!}}{t!}} = \left(\frac{n-2}{n}\right)^t = \left(t - \frac{2}{n}\right)^t \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο γνωστός A.O.E.D. ευχρηστής της πιθανότητας $P\{Y=0\} = e^{-2\theta}$ είναι $d^*(\underline{X}) = \left(t - \frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^n X_i$

#3: Εστω τ.δ. $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ από ματανορή με σ.π.π.

$f(x; \theta) = \exp\{-x - \theta\}$, $x > \theta$, $\theta > 0$. Να δρεθεί ο A.O.E.D. ευχρηστής της παραμέτρου θ .

Άνων Οι δρομές την επαρκή και πανόρμη σ.σ. για την παραμέτρου θ μεταβούσαι την βούθεια της παραδοσιακής θεωρίας F-N. Είναι $f(x; \theta) = \exp\{-x - \theta\} I_{(\theta, \infty)}(x)$

$$f(\underline{x}; \theta) = e^{\theta} e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n I_{(\theta, \infty)}(x_i)$$

$$= e^{\theta} I_{(\theta, \infty)}(x_{(1)}) e^{-\sum_{i=1}^n x_i}$$

Σύστα $\prod_{i=1}^n I_{(\theta, \infty)}(x_i) \neq 0$ μόνο όταν $x_i > \theta, \forall i = 1, \dots, n$.

Όμως, $x_{(1)} \leq x_i \forall i = 1, \dots, n$ σημάζει ότι $x_{(1)} > \theta \Rightarrow x_i > \theta \forall i = 1, \dots, n$.

Η σ.σ. $T(\underline{x}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για την παράτετρη θ , από το παραγοντικό νομό F-N, και $g(\theta, T(\underline{x})) = e^{\theta} I_{(\theta, \infty)}(x_{(1)})$ και $h(\underline{x}) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i}$. Για να διληφθεί είναι παρόντα θα πρέπει να υπολογίσουμε τη σ.π.π. της κ.μ. $Y = X_{(1)}$ και στη συνέχεια να διληφθεί: $E[g(Y)] = 0 \Rightarrow g(y) = 0, y > \theta$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[\min(X_1, \dots, X_n) \leq y]$$

$$= P[X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y] = \prod_{i=1}^n P[X_i \leq y] = \\ X_i \text{ a.v.}$$

$$\stackrel{*}{=} \prod_{i=1}^n F_{X_i}(y) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{\theta-y}) = n - \prod_{i=1}^n e^{\theta-y} =$$

$$*F_{X_i}(y) = \int_{-\infty}^y e^{-(x-\theta)} dx = \int_{\theta}^y e^{-(x-\theta)} dx$$

$$= \int_{\theta}^y e^{-x} e^{\theta} dx = e^{\theta} \int_{\theta}^y e^{-x} dx = e^{\theta} [-e^{-x}]_{\theta}^y$$

$$= e^{\theta} (-e^{-y} + e^{-\theta}) = 1 - e^{-y} e^{\theta} = 1 - e^{-y+\theta} =$$

$$= 1 - e^{\theta-y}$$

$$= n - e^{n(\theta-y)} = n - e^{-n(y-\theta)}, y > \theta$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = (n - e^{-n(y-\theta)})' = (-e^{-n(y-\theta)})' \\ &= -e^{-n(y-\theta)} (-n(y-\theta))' \\ &= -e^{-n(y-\theta)} (-n) = n e^{-n(y-\theta)}, y > \theta \end{aligned}$$

$$E[g(Y)] = \int_0^\infty g(y) n e^{-n(y-\theta)} dy \quad \underline{n(y-\theta) = \gamma \omega}$$

$$= \int_0^\infty g\left(\frac{\gamma}{n}\omega + \theta\right) e^{-\gamma\omega} d\omega = \int_0^\infty g^*(\omega) e^{-\gamma\omega} d\omega, \gamma \in \mathbb{R}$$

H $E[g(Y)]$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $g^*(\omega)$. Επομένως, από γνωστή πρότυπη, σε §. 30, αφού $E[g(Y)] = 0 \Rightarrow g^*(\omega) = 0, \omega > 0 \Rightarrow g\left(\frac{\gamma}{n}\omega + \theta\right) = 0, \omega > 0$

$$\Rightarrow g(y) = 0 \text{ for } y - \theta > 0$$

H σ.σ. $T^*(X) = X_{(1)} - \frac{L}{n}$ είναι αρεψημητής ευρικός όρος για θ, δ ότι.

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[X_{(1)}] = \int_0^\infty y n e^{-n(y-\theta)} dy \\ &= - \int_0^\infty y (e^{-n(y-\theta)})' dy \\ &= - \left\{ [y e^{-n(y-\theta)}]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-n(y-\theta)} dy \right\} \\ &= \theta + \int_0^\infty e^{-n(y-\theta)} dy = \theta - \frac{1}{n} [e^{-n(y-\theta)}]_0^\infty \\ &= \theta - \frac{1}{n}(0-1) = \theta + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Συνεπώς, $E[X_{(1)} - \frac{1}{n}] = 0$. Αρχοντικό Α.Ο.Ε.Δ. εγγυώντας
της παραμέτρων θέσις μη σ.σ. $T^*(\underline{x}) = X_{(1)} - \frac{1}{n}$.

#4 Ο αριθμός X των σωμάτων από οποιαν εντόπια περιοχή
μία ραδιενέργειας ουσία σε χρόνο 1sec ανατολεῖ την κατανομή¹
Poisson(λ), $\lambda > 0$ και σ.π. $P[X=k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,\dots$

Υποθέτουμε δημοσιεύεται η περίπτωση σ'που $\lambda = 0$. Αν
30 ραδιενέργειες πηγές της ίδιας έντασης παρατηρήθηκαν επί²
1sec και μετρήθηκαν 20 επικράτειες ενός τουλάχιστου σωματίου, να ληφθεί ο E.M. π. της παραμέτρων λ .

Άσκηση Είναι $P[X=0] = e^{-\lambda}$ και $P[X \geq 1] = 1 - P[X=0] = 1 - e^{-\lambda}$
Θεωρούμε την τ.μ. $Y = \begin{cases} 0, & \text{αν } X=0 \\ 1, & \text{αν } X \geq 1 \end{cases}$

Η τ.μ. $Y \sim \text{Bernoulli}(\lambda, \theta)$ σ'που $\theta = P[Y=1] = P[X \geq 1]$

Όφελος $L(\theta | \underline{y}) = \theta^{\sum_{i=1}^n y_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n y_i} = \lambda^{20} e^{-\lambda}$
πε $n=30$, $\sum_{i=1}^n y_i = 20$

Αρχαία $L(\theta | \underline{y}) = L(\lambda | \underline{x}) = (e^{-\lambda})^{10} (\lambda - e^{-\lambda})^{20}$

$$\ell_m L(\theta | \underline{y}) = -10\lambda + 20 \ell_m (\lambda - e^{-\lambda})$$

$$\frac{\partial \ell_m L(\theta | \underline{y})}{\partial \lambda} = -10 + \frac{20 e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = 0 \Rightarrow \frac{2 e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = 1$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} = \frac{1}{3} \text{ και } \frac{\partial^2 \ell_m L(\lambda | \underline{x})}{\partial \lambda^2} = -20 \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2} \stackrel{e^{-\lambda} = \frac{1}{3}}{=} < 0$$

Αρχαία $\hat{\lambda} = \ln 3 = 1.1.$

#5 Έστω $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από μετανομής με -7-

σ.κ. $F(x; \theta) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}, \alpha > 0, \theta > 0, x \in (0, \theta)$

Να δρεθεί ο ρυποδιατύπων της παραχέρω θυλανά
διερευνώντων οι σύστασης τ της αρεσογηφίας με την
συνέπεια.

Άνων Η σ.π.π. είναι:

$$f(x; \theta) = \frac{df(x; \theta)}{dx} = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} (\theta - x)^{\alpha-1}, x \in (0, \theta)$$

Οι ροπήσ $\ell \stackrel{\text{def}}{=} \ln L \stackrel{\text{def}}{=} \ln f(x; \theta)$ είναι:

$$E[X] = \int_0^\theta x f(x; \theta) dx = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \int_0^\theta x (\theta - x)^{\alpha-1} dx$$

$$= \alpha \theta \int_0^\theta \frac{x}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\theta} dx$$

$$\downarrow \quad \underbrace{\int_0^1 w(1-w)^{\alpha-1} dw}_{B(2, \alpha)} = \alpha \theta \frac{\Gamma(2)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+2)} =$$

$$\frac{x}{\theta} = w \quad B(2, \alpha) \quad = \frac{\alpha \theta \Gamma(\alpha)}{(2+\alpha) \alpha \Gamma(\alpha)} = \frac{\theta}{\alpha+1}$$

$$E[X^2] = \int_0^\theta x^2 f(x; \theta) dx = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \int_0^\theta x^2 (\theta - x)^{\alpha-1} dx$$

$$= \alpha \theta^2 \int_0^\theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\theta} dx = \alpha \theta^2 \underbrace{\int_0^1 w^2 (1-w)^{\alpha-1} dw}_{B(3, \alpha)}$$

$$= \alpha \theta^2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3+\alpha)} = \frac{\alpha \theta^2 2! \Gamma(\alpha)}{(\alpha+2)(\alpha+1) \alpha \Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{2\theta^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$\text{var}(x) = E[x^2] - (E[x])^2 = \frac{2\theta^2}{(a+1)(a+2)} - \left(\frac{\theta}{a+1}\right)^2 = \frac{a\theta^2}{(a+1)^2(a+2)}$$

Ο ροποευτιρητής της παρατέτων θέσης είναι ...

$$E[x] = \frac{\theta}{a+1} = \bar{x}_n \Rightarrow \hat{\theta} = (a+1)\bar{x}_n$$

Ο ροποευτιρητής είναι αρερόδημός,

$$\text{διότι } E[\hat{\theta}] = (a+1)E[\bar{x}_n] = (a+1) \underbrace{\frac{1}{n} \sum E[x]}_{= (a+1)E[x] = (a+1)\frac{\theta}{(a+1)}} = \theta.$$

Είναι και συνεπής ως ασυχτωτικά αρερόγηματος για
αυριθμήσεις

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\theta}) &= n(a+1)^2 \text{var}(\bar{x}_n) = \\ &= n(a+1)^2 n \text{var}(x) = (a+1)^2 \frac{a\theta^2}{(a+1)^2(a+2)} = \\ &= \frac{a\theta^2}{(a+2)} \cdot \left(\text{Συνεπής } \text{var}(\hat{\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a\theta^2}{a+2} = g^2(\theta) \right. \\ &\quad \left. \text{άρα } \hat{\theta} \text{ αυριθμήσεις}. \right) \end{aligned}$$

#6 Έστω $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, \bar{x}_n)$ τ.δ. από την Ευθετική(θ),
 $\theta \in \mathbb{R} = (0, \infty)$. Ας ήτε οι n σ.σ. $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$ είναι
επαριθμής και παίρνεις για την παράμετρο θ .

Άνων

$$\text{Έστω } \underline{x} \sim f(\underline{x}; \theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} I_{(0, \infty)^n}(\underline{x})$$

$$= g(\theta, \sum_{i=1}^n x_i) h(\underline{x}), \text{ διπλού}$$

$$g(\theta, \sum_{i=1}^n x_i) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}, \quad h(\underline{x}) = I_{(0, \infty)^n}(\underline{x}) = 1 \text{ αν } \underline{x} \in (0, \infty)^n = 0 \text{ αλλα } \underline{x} \notin (0, \infty)^n$$

$$\theta \in \mathbb{R} = (0, \infty)$$

Σύρφωνα με το Παραγοντικό πριγκίπιο $F-N$ ο σ.σ. $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. -9-
 είναι επαρκής για την Θ. Όταν δείχνουμε ότι η σ.σ. T είναι και πιθανή.
 Η παταναρή της T είναι Γαμμα(n, Θ) (ως απροσώπη η αυξ. ενδεικ-
 νών παταναρών με την ίδια ρέσητη πιθανή Θ). Το άνωτο τηρούν της T
 για ψήμα συνάρτηση $\phi: T \rightarrow \mathbb{R}$, και σχετικά ϵ είναι το $T = (0, \infty)$
 $E_\Theta \{\phi(T)\} = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$ σημαίνει ότι:

$$\begin{aligned} 0 = E_\Theta \{\phi(T)\} &= \int_0^\infty \phi(t) f_T(t; \Theta) dt \\ &= \int_0^\infty \phi(t) \frac{t^{n-1} e^{-t/\Theta}}{\Gamma(n) \Theta^n} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n) \Theta^n} \int_0^\infty \phi(t) t^{n-1} e^{-t/\Theta} dt \quad \forall \theta \in \Theta \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_0^\infty \phi(t) t^{n-1} e^{-t/\Theta} dt, \quad \forall \theta > 0 \quad \text{αν θέλουμε } \int_0^\infty = 0$$

που παίρνει όχις τις θετικές πραγματικές τιμές και οι οποίες το Θ
 διαρρέχει το $(0, \infty)$. Η τελευταία σχέση θέτει ότι ο μετασχηματισμός
 Laplace της συνάρτησης $\phi(t) t^{n-1} \equiv 0 \quad \forall \theta > 0$. Συνεπώς, η
 συνάρτηση $\phi(t) \equiv 0 \quad \forall t \in T$ και η σ.σ. T είναι πιθανή.

#7 Εστω $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από Γαμμα(α, β), $\Theta = (\alpha, \beta)$
 $\in \Theta = (0, \infty)^2$. Να δρεθεί επαρκής και πιθανής ο σ.σ.

Άνων είναι $X_i \sim f(x; \theta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} I_{(0, \infty)}(x)$

$\underline{X} \sim f(\underline{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha-1} e^{-x_i/\beta}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} I_{(0, \infty)}(x_i) = \frac{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\sum_{i=1}^n x_i/\beta}}{\Gamma(\alpha)^n \beta^{na}} I_{(0, \infty)}^{\underline{(x)}}(x)$$

$$= \exp \left\{ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\beta} - n \log \Gamma(\alpha) - n \alpha \log B \right\} \quad \forall \underline{x} \in S = (0, \infty)^n, \theta \in \Theta.$$

Η οιμογένεια ματανορών των \underline{x} είναι μία 2-ΠΕΟΚ με πυκνότητες των μορφών:

$$f(\underline{x}; \theta) = \exp \left\{ A(\theta) + B(\underline{x}) + \sum_{j=1}^2 G_j(\theta) T_j(\underline{x}) \right\} \quad \forall \underline{x} \in S, \theta \in \Theta$$

$$\text{με } A(\theta) = -n \log \Gamma(\alpha) - n \alpha \log B, \quad B(\underline{x}) = 0,$$

$$(G_1(\theta), G_2(\theta)) = (\alpha - 1, -\frac{1}{\beta})$$

$$(T_1(\underline{x}), T_2(\underline{x})) = \left(\sum_{i=1}^n \log x_i, \sum_{i=1}^n x_i \right) \text{ και } \text{το συνήρχον είναι}$$

το σύνοδο $(0, \infty)^n$ που δεν εμπεριέχει από την θ .

$$\text{Συνεπώς, μ.σ. } T(\underline{x}) = (T_1(\underline{x}), T_2(\underline{x})) = \left(\sum_{i=1}^n \log X_i, \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

είναι επαρκής σ.σ. Το πεδίο της της $(G_1(\theta), G_2(\theta))$

$= (\alpha - 1, -\frac{1}{\beta})$ είναι το $(-\infty, \infty) \times (-\infty, 0)$ που είναι γνόμων ανοικτό συνόρων άρα το ίδιο είναι ανοικτό σύνορο. Άρα, μ σ.σ. T είναι και πλήρης.

#8 Έστω $\underline{X} = (X_1, X_2)$ τ.δ. από ματανορή Bernoulli(ℓ, θ) $\theta \in \Theta = (0, 1)$. Χρησιμοποιώντας την ορισμό της επάρκειας, δείξτε ότι μ σ.σ. $T(\underline{X}) = X_1, X_2$ δεν είναι επαρκής για την παράγετρο θ .

Άνων Μία τ.ρ. $X \sim \text{Bernoulli}(\ell, \theta)$ παίρνει τιμές 0 ή 1.

Συνεπώς, μ σ.σ. $T(\underline{X}) = X_1, X_2$ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0 ή 1. Την τιμή 0 την παίρνει αν και $X_1 = 0$ ή $X_2 = 0$ ενώ την τιμή 1 αν και $X_1 = X_2 = 1$. Ορθώς,

$$P_\theta(X_1 = 0, X_2 = 0 | T = 0) = \frac{P_\theta(X_1 = 0, X_2 = 0, T = 0)}{P_\theta(T = 0)}$$

$$= \frac{P_\Theta(X_1=0, X_2=0)}{1 - P_\Theta(X_1=1, X_2=1)} = \frac{(1-\theta)^2}{1-\theta^2} = \frac{(1-\theta)(1-\theta)}{(1-\theta)(1+\theta)} = \frac{1-\theta}{1+\theta}$$

Συνεπώς, η ματανορή των \bar{X} δυσέντωσή της $T=0$ εξαρτάται από την θ . Αρα, η σ.σ. T δεν είναι επικρίτη σ.σ.

#9 Ο αριθμός των τυπογραφικών γραμμών ανά σερίδα σ'ένα βιβλίο ανοίγουθει ματανορή Poisson(θ), $\theta > 0$. Με τη θούδεια ενώς τ.δ. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ η σερίδων από την βιβλίο να δημιουργείται ο ΑΟΕΔ για την πιθανότητα της βιβλίου να μην έχει τυπογραφικά γάλη.

Λύση Από γνωστά πιραδείχνωτες των συρείσεων, η σ.σ.

$$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \text{ είναι επικρίτης και πιθήκης για την παραίρεσης}$$

Θ. Συνάρτηση να δρούμε μία Α.Ο.Ε.Δ. επικρίτης για τη συμφέρουση

$$P\{X=0\} = e^{-\theta} \frac{\theta^0}{0!} = e^{-\theta} = g(\theta)$$

α' τρόπος Έστω ότι ο γνωστός ΑΟΕΔ είναι $h(T) = h(T(\underline{X}))$

Οα πρέπει $E[h(T)] = e^{-\theta}$. Όμως T ~ Poisson($n\theta$) οπού

$$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i. \text{ Συνεπώς,}$$

$$E[h(T)] = \sum_{t=0}^{\infty} h(t) e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^t}{t!} = e^{-\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \frac{(n\theta)^t}{t!} = e^{(n-t)\theta} \text{ Όμως } e^{(n-t)\theta} \text{ είναι το}$$

αθροιστικά απέριων όρων της σειράς $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{((n-t)\theta)^t}{t!} = e^{(n-t)\theta}$

Άρα, Θα πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{t=0}^{\infty} h(t) \frac{(n\theta)^t}{t!} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{((n-t)\theta)^t}{t!}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} (h(t) n^t - (n-1)^t) \frac{\Theta^t}{t!} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) n^t - (n-1)^t = 0 \Rightarrow h(t) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^t$$

από τις σύστασης των δυναμοσειρών. Τελικά, ο AOEI ευριπητής των συνάρτησης $g(\theta) = e^{-\theta}$ είναι μεγάλη.

$$h(T) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^T, \text{ οπου } T = \sum_{i=1}^n X_i.$$

B' ρόπος: Θεωρούμε με σ.σ. $d(\tilde{x})$ τις οριζόντες ως

$$\text{εγίς: } d(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_1 = 0 \\ 0, & \text{αν } X_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Τότε } E[d(\tilde{x})] = 1 \cdot P[d(\tilde{x}) = 1] = P[X_1 = 0] = e^{-\theta}$$

Σημ. με σ.σ. $d(\tilde{x})$ είναι αρερόγνητη για τη συνάρτηση $g(\theta) = e^{-\theta}$. Σύμφωνα με τη θεωρία της Rao-Blackwell και Lehmann-Scheffé ο AOEI ευριπητής $d^*(\tilde{x})$ ορίζεται από μεγάλη:

$$d^*(\tilde{x}) = E[d(\tilde{x}) | T(\tilde{x}) = t] = P\left[d(\tilde{x}) = 1 \mid \sum_{i=1}^n X_i = t\right]$$

$$= \frac{P\left\{X_1 = 0, \sum_{i=1}^n X_i = t\right\}}{P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = t\right\}} = \frac{P\left\{X_1 = 0, \sum_{i=2}^n X_i = t\right\}}{P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = t\right\}}$$

$$= \frac{P\{X_1 = 0\} P\left\{\sum_{i=2}^n X_i = t\right\}}{P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = t\right\}} = \frac{e^{-\theta} e^{-(n-1)\theta} \frac{(n-1)\theta}{t!}}{e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^t}{t!}}$$

$$= \left(\frac{n-\ell}{n} \right)^t \Rightarrow d^*(x) = \left(1 - \frac{\ell}{n} \right) \sum_{i=1}^n x_i$$

#10 Εστω $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ τ.δ. από μαζική Bernoulli(ℓ, θ), $\theta \in \Theta = (0, \ell)$. Βρείτε τον ΑΟΕΙ ευτυχησύ της $g(\theta) = \theta \sum_{i=1}^n x_i$.

μονοιών την αντίστροφη Cramer-Rao.

$$\text{Άριστη Ισχύς στ. } \tilde{x} \sim f(x; \theta) = \theta \sum_{i=1}^n x_i (\ell - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} I_{[0, \ell]}(x)$$

Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0, \ell)$ είναι ένα δισταύρωμα υποσύνορο του \mathbb{R} . Το σημίτριγμα $S = [0, \ell]^n$ δεν εξαρτάται από την παραμέτρη θ . Για κάθε $x \in S$, $\theta \in \Theta$ η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial \theta} f(x; \theta)$ υπάρχει, αφού

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x; \theta) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta \right) \theta \sum_{i=1}^n x_i - \ell (\ell - \theta)^{n-1 - \sum_{i=1}^n x_i} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta \right)}{\theta(\ell - \theta)} f(x; \theta) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \log f(x; \theta) = \sum_{i=1}^n x_i \log \theta + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \log(\ell - \theta), x \in S$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{\ell - \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n\theta}{\theta(\ell - \theta)}, \\ x \in S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και} \\ I_n(\theta) &= E_\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) \right\}^2 = E_\theta \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n\theta}{\theta(\ell - \theta)} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{\theta^2(\ell - \theta)^2} E_\theta \left\{ \sum_{i=1}^n x_i - n\theta \right\}^2 = \frac{1}{\theta^2(\ell - \theta)^2} \text{var}_\theta \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\ell}{\theta^2(\ell-\theta)^2} n \theta (\ell-\theta) = \frac{n}{\theta(\ell-\theta)} \quad \forall \theta \in (0, \ell)$$

To náw φράγμα της ανισότητας Cramér-Rao για τη διασπορά των ακεράτων ευημένων $d_n(x)$ της

$$\frac{g(\theta) = \theta \text{ είναι } \left[g'(\theta) \right]^2}{I_n(\theta)} = \frac{\ell}{I_n(\theta)} = \frac{\theta(\ell-\theta)}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \text{var}[\bar{X}_n] &= \text{var}\left[\frac{\ell}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \\ &= \frac{\ell}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \frac{\ell}{n^2} n \text{var}(X_i) = \\ &= \frac{\ell}{n} \theta(\ell-\theta) = \frac{\theta(\ell-\theta)}{n} \quad \forall \theta \in \Theta \end{aligned}$$

Συνεπώς, επειδή ο \bar{X}_n είναι ένας αρερότητας ευημένων του $\theta = g(\theta)$ ο οποίως επειργχάνει το náw φράγμα Cramér-Rao για τη διασπορά των αρερότητων ευημένων του θ είναι ο ΑΟΕΙ ευημένων των $g(\theta) = \theta$.

