

ηαράδον 12/1 - 15/1

1

ΤΕΜΦΕ 5^ο Εξάμηνο
Αριθμητική Ανάλυση II
Εργασία

Μέρος 1^ο (μονάδες 4x0.15=0.6)

1. Να μετατραπεί το πρόγραμμα rk4.m ώστε να υλοποιεί τη μέθοδο Runge Kutta 4^{ης} τάξης με 5 στάδια με συντελεστές:

0	0	0	0	0	0
1/3	1/3	0	0	0	0
1/3	1/6	1/6	0	0	0
1/2	1/8	0	3/8	0	0
1	1/2	0	-3/2	2	0
	1/6	0	0	2/3	1/6

Το πρόγραμμα να ονομασθεί nrk4.m

2. Να μετατραπεί το πρόγραμμα frk45.m ώστε να υλοποιεί το ζεύγος μεθόδων Runge Kutta 4^{ης} και 5^{ης} τάξης με συντελεστές που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$b_1 = 47641/481950, b_2 = 0, b_3 = 9183428608/18507820275,$$

$$b_4 = 8673642/2202775, b_5 = -2605848518/189659475, b_6 = 4389/430, b_7 = 0$$

$$b_1 - \hat{b}_1 = 651109/76710375, b_3 - \hat{b}_3 = -170684317696/5891656120875,$$

$$b_2 - \hat{b}_2 = 0, b_4 - \hat{b}_4 = 3797267688/2103650125, b_7 - \hat{b}_7 = -1/20$$

$$b_5 - \hat{b}_5 = -490656860239/60374932875, b_6 - \hat{b}_6 = 5249937/821300,$$

$$c_1 = 0, c_2 = 9/40, c_3 = 21/64, c_4 = 17/18, c_5 = 90/91, c_6 = 1, c_7 = 1$$

$$a_{21} = 9/40,$$

$$a_{31} = 91/1024, a_{32} = 245/1024,$$

$$a_{41} = 2512481/1928934, a_{42} = -752845/137781, a_{43} = 1641520/321489$$

$$a_{51} = 167600779485/95414145736, a_{52} = -1480997775/200449886,$$

$$a_{53} = 17446962744/2621672509, a_{54} = -4711141359/138253149944$$

$$a_{61} = 502734007/269217270, a_{62} = -6511090/829521,$$

$$a_{63} = 977303027168/139196025045, a_{64} = -31502187/1289063930,$$

$$a_{65} = -18516316/1251752535$$

$$a_7 = \hat{b}_i, i=1,2,\dots,6$$

Το πρόγραμμα να ονομασθεί nrk45.m. Επίσης να γίνουν οι κατόλληκτες μετατροπές στα nrk45.m και frk45.m ώστε να επιστρέφουν, σιτός από τη διαμέριση του χρόνου και την προσέγγιση της λύσης, το αριθμό των απορριπτόμενων βημάτων.

3. Να μετατραπεί το πρόγραμμα ab5sem.m ώστε να υλοποιεί την πολυβηματική μέθοδο τύπου Adams-Basforth 4^{ης} με 4 στάδια:

$$Y_{n+2} = Y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{24} (55f(x_{n+2}, Y_{n+\frac{1}{2}}) - 59f(x_{n+1}, Y_{n+\frac{1}{2}}) + 37f(x_{n+1}, Y_{n+1}) - 9f(x_n, Y_n))$$

Το πρόγραμμα να ονομασθεί ab4sem.m

4. Να μετατραπεί το πρόγραμμα pc5.m ώστε να υλοποιεί την πολυβηματική μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n+4}^P &= \mathcal{P}_{n+3} + \frac{h}{24} (55f(x_{n+3}, \mathcal{P}_{n+3}) - 59f(x_{n+2}, \mathcal{P}_{n+2}) + 37f(x_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1}) - 9f(x_n, \mathcal{P}_n)) \\ \mathcal{P}_{n+4}^F &= \mathcal{P}_{n+3} + \frac{h}{24} (9f(x_{n+4}, \mathcal{P}_{n+4}') + 19f(x_{n+3}, \mathcal{P}_{n+3}') - 5f(x_{n+2}, \mathcal{P}_{n+2}') + f(x_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1}')) \end{aligned}$$

Το πρόγραμμα να ονομασθεί pc4.m

Μέρας 2^o (Σπάνιαι μεταβλητές 1.4)

1. Κάντε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών που συναντάμε στη διαδικασία λληθύμων.

$$x'(t) = 2(x(t) - x(t)y(t))$$

$$y'(t) = -(y(t) - x(t)y(t))$$

με αρχικές τιμές $x(0) = 1$ και $y(0) = 3$. Η λύση των παραπάνω συστήματος υπανοποιεί τον ακόλουθο νόμο:

$$G(t, x, y) = e^{x+2y}/(xy^2) = \sigma t \alpha \theta.$$

Η θεωρία λέει ότι το G είναι σταθερό και ότι η λύση είναι περιοδική οπότε η καμπύλη $(x(t), y(t))$ είναι κλειστή.

Ολοκληρώστε το πρόβλημα με τις nk4.m στο διάστημα $[0, 10]$ και αφού πειραματιστείτε με την επιλογή του βήματος ώστε να βρείτε την τιμή του h για την οποία η αριθμητική λύση υπανοποιεί δίνει G σχεδόν σταθερό και η καμπύλη $(x(t), y(t))$ φαίνεται να είναι κλειστή.

Ολοκληρώστε το πρόβλημα με τις nk45.m στο διάστημα $[0, 10]$ και αφού πειραματιστείτε με την επιλογή της παραμέτρου ανοχής, ώστε να βρείτε την τιμή του TOL για την οποία η αριθμητική λύση υπανοποιεί δίνει G σχεδόν σταθερό και η καμπύλη $(x(t), y(t))$ φαίνεται να είναι κλειστή.

(Μονάδες 0.4)

6. Είναι γνωστό ότι για μία πολυβηματική μέθοδο με τάξη p για το ολικό σφάλμα ισχύει

$$GE_{n+1} = \|y_{n+1} - y(x_{n+1})\| = O(h^p) \leq K \cdot h^p$$

Από αυτή τη σχέση βλέπουμε ότι αν υποδιπλασιάσουμε το βήμα h αναμένουμε το νέο ολικό σφάλμα να έχει ένα πηλίκο με το παλαιό περίποιο ίσο με 2^p . Με βάση αυτήν την παρατήρηση μπορούμε από τη συμπεριφορά του ολικού σφάλματος να βρούμε εμπειρικά την τάξη μιας μεθόδου.

Στο ερώτημα αντό θα λύσετε το πρόβλημα, από τον πίνακα που ακολουθεί, και αντιστοιχεί σε αύξοντα αριθμό ίσο με το τελευταίο ψηφίο του αριθμού φοιτητικού μητρώου σας. Γράψτε οδηγό πρόγραμμα Matlab (script) το οποίο να λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών, που σας αντιστοιχεί, με τη ab4sem.m για εννέα διαφορετικέ βήματα ($h=2^{-(k)}$, $k=2..10$). Το πρόγραμμα να καταχωρεί σε ένα διάνυσμα το μέγιστο απόλυτο σφάλμα για τις διάφορες επιλογές του βήματος h . Στη συνέχεια να υπολογίζει και να καταχωρεί σε ένα άλλο διάνυσμα το πηλίκο των δύο διαδοχικών μέγιστων απόλυτων σφαλμάτων. Σύμφωνα με τα δύο αναφέρεμε παραπάνω, που θα πρέπει να τείνουν οι όροι του τελευταίου αντού διανύσματος και γιατί: Το πρόγραμμα να χρησιμοποιεί τη for και να είναι δύνατό με μία αύλαγή τιμής μεταβλητής να μπορεί να αλλάξει ο αριθμός των φοράν που λύνει το πρόβλημα μειώνοντας το βήμα στη μέση. Επαναλάβετε το ίδιο και για την pc4.m.

(Μονάδες 0.4)

Α.Α.	Πρόβλημα	Αρχική Τιμή	Διάστημα λύσης	Πραγματική Λύση
6	$y' = y/t - (y/t)^2$	$y(1) = 1$	$[1, 4]$	$y(t) = t/(1 + \ln(t))$
1	$y' = 1 + y/t + (y/t)^2$	$y(1) = 0$	$[1, 4]$	$y(t) = t \cdot \tan(\ln(t))$
2	$y' = -(y+1)(y+3)$	$y(0) = -2$	$[0, 5]$	$y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$
3	$y' = (t+2t^3)y^3 - ty$	$y(0) = 1/3$	$[0, 5]$	$y(t) = 1/\sqrt{(3 + 2t^2 + 6e^{t^2})}$

4	$y' = \cos(2t) + \sin(3t)$	$y(0) = 1$	$[0,10]$	$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{4}{3}$
5	$y' = 1 + (t - y)^2$	$y(2) = 1$	$[2,5]$	$y(t) = t + 1/(1-t)$
6	$y' = y - t^2 + 1$	$y(0) = 1/2$	$[0,3]$	$y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$
7	$y' = 2t - y$	$y(0) = -1$	$[0,5]$	$y(t) = e^{-t} + 2t - 2$
8	$y' = -y - 2t$	$y(0) = -1$	$[0,5]$	$y(t) = -3e^{-t} - 2t + 2$
9	$y' = 1/t^2 - y/t - y^2$	$y(1) = -1$	$[1,20]$	$y(t) = -1/t$

7. Δίνεται το ακόλουθο άκαμπτο πρόβλημα (stiff):

$$y'(t) = -(100 + ams)y(t) + 10, \quad y(0) = 1$$

όπου ams είναι το τελεινταίο ψηφίο του αριθμού φοιτητικού μητρώου σας.

Γράψτε οδηγό πρόγραμμα Matlab (script) το οποίο να λύνει το παραπόνω πρόβλημα με την frk45.m και την nk45.m στο διάστημα $[0,10]$ για δέκα διαφορετικές διαφορετικά βήματα ($Tol=10^{i-10}$, $i=1..10$). Στη συνέχεια το πρόγραμμα να παρουσιάζει σε ένα γράφημα και για τις δύο μεθόδους για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου ανοχής τον αριθμό των επιτυχών βημάτων. Επίσης σε ένα άλλο γράφημα και για τις δύο μεθόδους για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου ανοχής τον αριθμό των απορριπτόμενων βημάτων. Επίσης, ολοισληρώστε το πρόβλημα με την nk4.m στο ίδιο διάστημα και αφού πειραματιστείτε με την επιλογή του βήματος βρείτε πειραματικά την τιμή του h για την οποία η αριθμητική λύση παραμένει ευστοιθής και δεν εκτινάσσεται λόγω της φύσης του προβλήματος.

(Μονάδες 0.6)

Οδηγίες.

- Τα rk4.m, frk45.m, ab5sem.m, pc5.m έχουν χρησιμοποιηθεί στα εργαστηριακά μαθήματα και ασκήσεις και μπορείτε να τα βρείτε στο υλικό των εργαστηρίων που υπάρχουν στην ιστοσελίδα του διδάσκοντα.
- Ο χρόνος παράδοσης θα αναρτηθεί στην ιστοσελίδα του διδάσκοντα και εξαρτάται από το πρόγραμμα που θα ακολουθηθεί μετά τις εορτές των Χριστουγέννων. Η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί από τον ίδιο το φοιτητή. Δε θα γίνονται δεικτές εργασίες που αποστέλλονται μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου.
- Θα πρέπει να παραδοθεί εκτυπωμένη εργασία συρραμφένη (απλά) έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να την ξεφυλλίσει. Η εργασία θα πρέπει να έχει εξωφρενικά στο οποίο να αναφέρεται ο αύξων αριθμός της, το όνομα και ο αριθμός μητρώου του φοιτητή, τα στοιχεία της σχολής και του μαθήματος, η ημερομηνία παράδοσης και το τμήμα το οποίο παρακολουθεί εργαστήριο. Σε παράρτημα θα πρέπει να υπάρχουν εκτυπωμένοι οι κώδικες (το προγράμμα, scripts και .m αρχεία). Στο ικύριο μέρος της εργασίας θα πρέπει να αναπτύσσονται η διαδικασία, τα σχήματα, τα γραφήματα και μόνο ίσα. από τα αποτελέσματα είναι απαραίτητα για τα συμπεράσματα. Όλα αυτά θα πρέπει να έχουν τη συνοχή συναίσιου και μένουν. Εκτός από τις όποιες εκτυπώσεις θα πρέπει να παραδοθούν τα πρεγράμματα και τα αποτελέσματα τους σε ηλεκτρονική μορφή (διατίττε). Τα αποτελέσματα μπορείτε να τα αποθηκεύσετε με τη χρήση της dia.gr.
- Αν δεν υπάρχει δινήστρητη παράδοσης της εργασίας σε έντυπη (εκτυπωμένη) μορφή, γίνεται δεικτή και διατίττε που να περιέχει όλα, όσα αναφέρονται παραπόνω. Δηλαδή, επιπλέον των προγραμμάτων και αποτελέσμάτων η διστίστα θα πρέπει να περιέχει και ενα αρχείο Word που θα έχει ως περιεχόμενο ίδια όσε θα παραδίδετε σε εκτυπωμένη μορφή.
- Τόσο η πληρότητα, τα σχήματα τα οποία ακολουθήθηκαν σ. αθηγίας είλα και ο τρόπος της παρουσίασης των αποτελέσμάτων της εργασίας που θα παραδοθεί θα ήητρθούν υπό σύντην κατέ την αξιολόγηση.