

ΘΕΜΑ

Η δυναμική εξέλιξη δύο πληθυσμών $x(t)$ (κουνελιών) και $y(t)$ (λύκων) μοντελοποιείται από το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(a - by) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -y(c - gx)\end{aligned}\quad (1)$$

όπου οι παράμετροι a, b, c και e αναπαριστούν τον τρόπο που αλληλεπιδρούν τα δύο είδη.

1. Να γράψετε κώδικα σε γλώσσα Fortran ο οποίος να επιλύει αριθμητικά το παραπάνω σύστημα με τη μέθοδο Euler. Το πρόγραμμα να ονομαστεί population.f, ενώ τα αποτελέσματα να γράφονται σε αρχείο population.dat με την εξής σειρά:

$$\left(t, x(t), y(t), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right).$$

2. Εκτελέστε το πρόγραμμα για $a = 2, b = 1, c = 4, g = 3$ με αρχικούς πληθυσμούς $x(0) = 3, y(0) = 5$ και συνολικό χρόνο $t_f = 15$ (χρόνια). Να μειώσετε το βήμα της ολοκλήρωσης dt μέχρι τα αποτελέσματά σας να σταθεροποιηθούν. Παραστήστε γραφικά, στό ίδιο σύστημα αξόνων, τους δύο πληθυσμούς σε συνάρτηση με το χρόνο και αποθηκεύστε τη γραφική παράσταση στο αρχείο population1.ps. Υπολογίστε την περίοδο ταλάντωσης με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του πληθυσμού των λύκων και των κουνελιών με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.
3. Θεωρήστε τις ίδιες τιμές των παραμέτρων από το προηγούμενο ερώτημα. Παραστήστε γραφικά στό ίδιο σύστημα αξόνων τους ρυθμούς μεταβολής των δύο πληθυσμών $(dx(t)/dt, dy(t)/dt)$ σε συνάρτηση με το χρόνο και αποθηκεύστε τη γραφική παράσταση στο αρχείο rate.ps. Υπολογίστε τους ρυθμούς μεταβολής $(dx(t = 8)/dt, dy(t = 8)/dt)$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.
4. Παραστήστε γραφικά το διάγραμμα φάσης $(x(t), y(t))$ και αποθηκεύστε τη γραφική παράσταση στο αρχείο phase.ps.

4. Τροποποιήστε το αρχικό μοντέλο των διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(2 - y - 3x) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -y(4 - 3x + 4y)\end{aligned}\quad (2)$$

Εκτελέστε το πρόγραμμα για αρχικούς πληθυσμούς $(x(0) = 3, y(0) = 5)$ και συνολικό χρόνο $t_f = 8$ (χρόνια). Το πρόγραμμα να ονομαστεί population2.f. Παραστήστε γραφικά στό ίδιο σύστημα αξόνων τους δύο πληθυσμούς σε συνάρτηση με το χρόνο και αποθηκεύστε τη γραφική παράσταση στο αρχείο population2.ps. Θα μπορούσατε να χαρακτηρίσετε την εξέλιξη των δύο πληθυσμών περιοδική; Ποιες είναι οι τελικές τιμές πληθυσμού που τείνουν τα δύο είδη και ποιο είδος θα επικρατήσει τελικά;

Πρέπει να παραδοθούν τα αρχεία population.f, population2.f, population1.ps, population2.ps, rate.ps, phase.ps και το αρχείο κειμένου NOTES που περιέχει τις απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα.