



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πολυτεχνειούπολη-Ζωγράφου

ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ. : 77 21 744

FAX : 77 21 775

Ανάλυση Χρονοσειρών
Εξετάσεις Ιουνίου 2009
ΣΕΜΦΕ

$$\psi_n = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} n^j \right\} \bar{f}_i, n \geq m-p$$

$$\psi_j = \sum_{k=0}^p \varphi_k \psi_{j-k} = \theta_j \quad 0 \leq j < m$$

✓ **Ζήτημα 1^ο.** Να αποδειχθεί ότι όταν μια χρονοσειρά ARMA[2,q] είναι αιτιατή τότε ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες.

- (i) $\varphi_1 + \varphi_2 < 1$,
- (ii) $\varphi_2 - \varphi_1 < 1$,
- (iii) $|\varphi_2| < 1$.

Ζήτημα 2^ο. Στο μοντέλο ARMA[1,1], με $|\varphi| < 1$ και $|\theta| < 1$, να δείξετε ότι ισχύει η

$$\frac{\chi(h)}{\chi(0)}$$

$$\rho(1) = \frac{(\theta + \varphi)(\theta\varphi + 1)}{\theta^2 + 2\theta\varphi + 1}$$

$$\psi_n = \dots$$

✓ **Ζήτημα 3^ο:** Έστω $\mathcal{H}_n = \overline{sp}\{X_1, \dots, X_n\}$, $\mathcal{K} = \overline{sp}\{X_2, \dots, X_n\}$ και $\mathcal{L} = \overline{sp}\{X_1 - P_{\mathcal{X}}X_1\}$, δηλαδή το ευθύ άθροισμα $\mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$ δίνει το χώρο \mathcal{H}_n . Θεωρούμε την ανάλυση

$$\hat{X}_{n+1} \equiv P_{\mathcal{H}_n} X_{n+1} = P_{\mathcal{K}} X_{n+1} + P_{\mathcal{L}} X_{n+1} = P_{\mathcal{K}} X_{n+1} + a(X_1 - P_{\mathcal{X}}X_1)$$

Να δείξετε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

- ✓ (i) $a = \langle X_{n+1}, X_1 - P_{\mathcal{X}}X_1 \rangle / \|X_1 - P_{\mathcal{X}}X_1\|^2$,
- ✓ (ii) $\|X_1 - P_{\mathcal{X}}X_1\|^2 = \|X_{n+1} - P_{\mathcal{K}}X_{n+1}\|^2 = v_{n-1} = \|X_n - P_{\mathcal{H}_{n-1}}X_n\|^2$

όπου $v_{n-1} = \|X_n - P_{\mathcal{H}_{n-1}}X_n\|^2$.

ζ **Ζήτημα 4^ο.** Να υπολογιστεί ο πίνακας διασποράς της ασυμπτωτικής κατανομής του $(\hat{\rho}(1), \hat{\rho}(2))^T$ από τις διαδοχικές τιμές $\{x_i : i = 1, \dots, n\}$ μιας αιτιατής AR[1] χρονοσειράς.

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \quad \hat{\gamma}(h) = ?$$

$$\rho(i) = \varphi^{|i|}$$

$$w_{ii} = \sum_{k=1}^i \varphi^{2k} (\varphi^{-k} - \varphi^k)^2 + \sum_{k=i+1}^{\infty} \varphi^{2k} (\varphi^{-i} - \varphi^i)^2$$

$$= (1 - \varphi^{2i})(1 + \varphi^2)(1 - \varphi^2)^{-1} - 2i\varphi^{2i}, \quad i=1, 2, \dots$$

$$\approx \frac{1 + \varphi^2}{1 - \varphi^2}, \quad i \rightarrow \infty$$

Διάρκεια εξέτασης: 2 ½ ώρες

$$1 + \varphi_1 - \varphi_2 < 0 \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 > 1$$

$$\phi(1) < 0 \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 > 1$$

$$1 - \varphi_1 - \varphi_2 < 0$$