

ΣΧΟΛΗ: ΕΜΦΕ
ΕΞΑΜΗΝΟ: 6ο

Kun Hos Σωτήρας

Σεπτέμβριος 2008

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1. Έστω A και B υποσύνολα του Ω με $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B \neq A$, $A \cap B \neq B$, $A \cup B \neq \Omega$. Να περιγράψετε.

- (i) Το σύστημα Dynkin D που παράγεται από τα A και B .
- (ii) Τον ημιδικτύλιο C που παράγεται από τα A και B .
- (iii) Την ημιάλγεβρα H που παράγεται από τα A και B .
- (iv) Την άλγεβρα Σ που παράγεται από τα A και B .

2. Έστω a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε τα μονοσύνολα $A_n = \{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

- (i) Να περιγράψετε όλες τις δυνατές μορφές που θα μπορούσε να έχει το σύνολο $\liminf_n A_n$. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (ii) Είναι δυνατόν να έχουμε $\limsup_n A_n = \{1, 2\}$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (iii) Είναι δυνατόν να έχουμε $\limsup_n A_n = \{1, 2, 3, \dots\}$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (iv) Άν $\liminf_n A_n = \{0\}$, τι μπορεί να είναι το $\limsup_n A_n$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

3. Έστω ο χ.π. (Ω, \mathcal{F}, P) , όπου $\Omega = (-1, 1)$ (το ανοικτό διάστημα) και $\mathcal{F} =$ τα Borel υποσύνολα του $(-1, 1)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις (με πεδίο ορισμού το Ω)

$$X(\omega) = \sin \omega \quad \text{και} \quad Y(\omega) = \cos \omega.$$

- (i) Είναι οι X και Y τυχαίες μεταβλητές;
- (ii) Να περιγράψετε τις σ-άλγεβρες $\sigma(X)$ και $\sigma(Y)$.
- (iii) Είναι η X μετρήσιμη ως προς την $\sigma(Y)$;
- (iv) Είναι η Y μετρήσιμη ως προς την $\sigma(X)$;

4. Δίνεται ότι η τ.μ. X έχει σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4}{4 + x^4}.$$

- (i) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.
- (ii) Για $n = 1, 2, \dots$ θέτουμε $X_n = X \mathbf{1}_{\{-n \leq X \leq n\}}$. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_n E[X_n]$. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
- (iii) Άν X_n , $n = 1, 2, \dots$, είναι όπως στο (ii), να υπολογιστεί το όριο $\lim_n E[|X_n|^3]$. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

5. Θεωρούμε τις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y με σ.π.π. $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οι X και Y είναι ανεξάρτηρες με $E[|X|^p] < \infty$, για κάποιο $p \geq 1$, και $E[Y] = 0$. Να αποδείξετε ότι $E[|X+Y|^p] \geq E[|X|^p]$.

Διάρκεια : 2.5h

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!