

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1. (α) Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και M η κλάση των μονομελών υποσυνόλων του Ω . Να περιγραφεί η συνάρτηση $c(M)$ και το σύστημα Dynkin $d(M)$.
 (β) Θεωρούμε την ακαλούσθια των συνόλων $A_n = [0, \cos^2 n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Να βρεθούν τα σύνολα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2. Διατυκώστε και αποδείξτε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε (χωρίς απόδειξη) το Λήμμα Fatou.

3. Έστω X θετική τυχαία μεταβλητή με $E[X] = \infty$. Αν $A_n = \{X \leq n\}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, να δειχθεί ότι

$$\lim_n \frac{E[X \mathbf{1}_{A_n}]}{n} = 0.$$

4. Έστω X θετική τυχαία μεταβλητή ενός χώρου πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) .

- (α) Αν $F(x) = P\{X \leq x\}$ είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της X , να δειχθεί ότι

$$E[X] = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx = \int_0^\infty P\{X > x\} dx.$$

- (β) Υποθέτουμε ότι $E[X] = 1$ και $V[X] = 1$. Για $A \in \mathcal{F}$ ορίζουμε

$$Q(A) = E[X \mathbf{1}_A].$$

Να δειχθεί ότι η συνολοσυνάρτηση Q είναι μέτρο πιθανότητας στο (Ω, \mathcal{F}) και στη συνέχεια να βρεθεί η μέση της $E_Q[X]$ της X ως προς το μέτρο Q .

5. Έστω X εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $a > 0$.

- (α) Να υπολογίσετε (δείχνοντας όλα τα βήματα) την χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(t)$ της X .
 (β) Να υπολογίσετε την μέση της $E[X^{2010}]$.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!