

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
 Συναρτησιακή Ανάλυση
 28-8-2009

Θέμα 1. (α) Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής.

- (i) Δώστε τους ορισμούς των $\text{Ker}T$, $\text{Im}T$ και δείξτε ότι είναι διανυσματικοί υπόχωροι των X και Y αντίστοιχα.
- (ii) Αν ο T είναι $1 - 1$ και $D \subset X$ γραμμικά ανεξάρτητο, τότε $T[D]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του Y .
- (iii) Αν ο X έχει υπεραριθμήσιμη Hamel βάση και ο Y έχει αριθμήσιμη Hamel βάση, δείξτε ότι $\text{Ker}T \neq \{0_X\}$.

(β) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $D \subset X$ πυκνό.

- (i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ το $S(x, \varepsilon) \cap D$ είναι άπειρο σύνολο.
- (ii) Δείξτε ότι για κάθε $F \subset D$ πεπερασμένο, το σύνολο $D \setminus F$ είναι πυκνό στον X .
- (iii) Δείξτε ότι το σύνολο $D' = \{\frac{x}{\|x\|} : x \in D, x \neq 0_X\}$ είναι πυκνό στην S_X .

Θέμα 2. (α) Έστω H χώρος Hilbert.

- (i) Δείξτε ότι για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f(y) = \langle x, y \rangle$.
- (ii) Δείξτε ότι ο τελεστής που σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχεί το f_x τέτοιο ώστε $f_x(y) = \langle x, y \rangle$ είναι γραμμική ισομετρία.

(β) Έστω χώρος Hilbert, Y υπόχωρος του H , $x \in H$ και $y \in Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in Y\}$.
- (ii) $x - y \perp Y$.

Θέμα 3. (α) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός, δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο T είναι συνεχής.
- (ii) Υπάρχει $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε το $T[B(x, \varepsilon)]$ να είναι φραγμένο υποσύνολο του Y .

(β) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός συνεχής τελεστής. Θέτουμε $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ ως εξής

$$T^*(y^*) = y^* \circ T$$

- (i) Δείξτε ότι ο T^* είναι γραμμικός.
- (ii) Δείξτε ότι $\|T\| = \|T^*\|$.
- (iii) Αν ο T είναι ισομετρία και επί, τότε το ίδιο ισχύει και για τον T^* .

Θέμα 4. (α) Έστω K_1, K_2 κυρτά σύνολα στον $(X, \|\cdot\|)$.

- (i) Πότε τα K_1, K_2 διαχωρίζονται (διαχωρίζονται γνήσια) από ένα στοιχείο $x^* \in X^*$.
- (ii) Αποδείξτε ότι αν τα K_1, K_2 διαχωρίζονται, τότε για κάθε $x \in X$ τα $x + K_1, x + K_2$ επίσης διαχωρίζονται.
- (iii) Δείξτε ότι αν K κυρτό, $K^\circ \neq \emptyset$ και $x \notin K^\circ$, τότε το K και το x διαχωρίζονται. (Δώστε τους αναγκαίους ορισμούς και τη διατύπωση των θεωρημάτων που ύπαρχουν).

(β)(i) Δείξτε ότι ο $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)^*$ είναι μη διαχωρίσιμος.

- (ii) Δείξτε ότι υπάρχει $T : \ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)^*$ γραμμική ισομετρία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!