

Εξετάσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης
22 Φεβρουαρίου 2010

Θέμα 1 (a) Δώστε τον ορισμό του γραμμικού τελεστή $T : X \rightarrow Y$, όπου X, Y είναι διανυσματικού χώρου.

(b) Αποδείξτε ότι $\text{Ker}T, \text{Im}T$ είναι υπόχωροι των X, Y αντίστοιχα.

(c) Δείξτε ότι ο T είναι 1-1 αν και μόνο αν $\text{Ker}T = \{0_X\}$.

(d) Αν $F \subset X$ γραμμικά ανεξάρτητο και T 1-1, δείξτε ότι $\{T(x) : x \in F\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον Y . (Διατυπώστε τον ορισμό του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου.)

Θέμα 2 (a) Έστω $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} = Q \cap [0, 1]$. Ορίζουμε $T : C[0, 1] \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N})$ όπου $T(f) = (f(q_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) ο T είναι γραμμικός και 1-1.

(ii) ο T είναι υπομετρία ($\|T(f)\|_\infty = \|f\|_{\text{sup}}$).

(iii) ο T δεν είναι επι.

(b) Έστω $T : \ell^1 \rightarrow X$ γραμμικός ώστε $\sup\{\|T(e_n)\|_X : n \in \mathbb{N}\} = M < \infty$. Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) ο T είναι φραγμένος.

(ii) $\|T\| = M$.

(c) Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) ο ταυτοχός τελεστής $I : (c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1) \rightarrow (c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\max})$ είναι φραγμένος.

(ii) ο ταυτοχός τελεστής $I : (c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\max}) \rightarrow (c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ δεν είναι φραγμένος.

όπου $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\max} = \max\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ και $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Θέμα 3 (a) Έστω X χώρος Banach, F κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus F$.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|x^*\| = 1$, $x^*|_F = 0$ και $x^*(x_0) = \text{dist}(x_0, F)$.

(ii) Δείξτε ότι αν $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|x^*\| = 1$, $x^*|_F = 0$, τότε $|x^*(x_0)| \leq \text{dist}(x_0, F)$.

(b) Έστω X χώρος με νόρμα και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησείδες.

(i) Είστε το $f[B(x, r)] = \mathbb{R}$ t; το $f[B(x, r)]$ είναι άνω και κάτω φραγμένο.

(ii) Αν το $f \neq 0$ τότε $\text{Ker}f$ είναι πικούνιο αν και μόνο αν το f δεν είναι συνεγές.

Θέμα 4 (a) Δώστε το ορισμό του θετικού υπογραμμικού συναρτησείδος.

(b) Αν X χώρος Banach και $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ θετικό υπογραμμικό συναρτησείδες δείξτε ότι τα επόμενα είναι μοδόνομα.

(i) Το ρ είναι συνεγές.

(ii) Το $\rho(B_X)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} .

(c) Έστω X χώρος με νόρμα και $D \subseteq B_X$ ώστε για κάθε $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x) : x \in D\}$. Δείξτε ότι $B_X = \overline{\text{span}} D$ (υρταπούστε το βαρυτιστικό θεώρημα).