

Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης, 24/09/2009

Θέμα 1 (α) Δίνονται τα σύνολα

$$A_1 = \mathbb{N}, \quad A_2 = \left\{ n + \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

- (i) Δείξτε ότι τα A_1, A_2 είναι ξένα και κλειστά υποσύνολα του \mathbb{R} .
- (ii) Δώστε τον ορισμό της απόστασης $d(A, B)$ όπου A, B είναι υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ) .
- (iii) Τι πολογίστε την απόσταση $d(A_1, A_2)$.
- (iv) Υπάρχουν A, B υποσύνολα του \mathbb{R} , ώστε A, B να είναι κλειστά και φραγμένα, $A \cap B = \emptyset$ και $d(A, B) = 0$? (Εξηγήστε πλήρως την απάντησή σας).

(β). Δίνονται τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R}^2 :

$$B_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \in \mathbb{Q}^+\}$$

$$B_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Βρείτε τις κλειστότητες $\overline{B}_1, \overline{B}_2$ των B_1, B_2 .

Θέμα 2 (α) (i) Εστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Πότε το x_0 λέγεται οριακό σημείο του A και πότε σημείο συσσώρευσης;

(ii). Για $(X, \rho) = (\mathbb{R}, \rho_{|,|})$, δώστε παράδειγμα ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ ώστε το x_0 να είναι οριακό σημείο του A αλλά όχι σημείο συσσώρευσης, και το x_1 σημείο συσσώρευσης του A , $x_1 \notin A$. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)

(β). (i). Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)

(ii) Εστω (X, ρ) μετρικός χώρος ώστε το σύνολο

$$\{x \in X : x \text{ σημείο συσσώρευσης}\} = \emptyset.$$

Δείξτε ότι κάθε $A \subset X$, είναι ανοικτό και κλειστό σύνολο.

Θέμα 3 (α) (i) Δώστε τον ορισμό του συμπαγούς υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου.

(ii) Δείξτε ότι αν ο (X, ρ) είναι μετρικός χώρος ώστε κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που δεν έχει σταθερή υπακολουθία, έχει ένα σημείο συσσώρευσης, τότε ο (X, ρ) είναι πλήρης.

(iii) Δείξτε ότι για (X, ρ) συμπαγή, $\text{diam}(X) < \infty$.

(β). Εστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ συστολή (δηλ. υπάρχει $C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$). Δείξτε ότι:

(i) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\text{diam } f^n[X] \leq C^n \cdot \text{diam } X$ και ότι $f^{n+1}[X] \subset f^n[X]$.

(ii) Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\cap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \{x_0\}$ και ότι $f(x_0) = x_0$. (Τι πόδειξη: Είναι $\text{diam } X < \infty$ αφού (X, ρ) συμπαγής.)

Θέμα 4 (α) (i) Διατυπώστε το Θεώρημα Baire και αποδείξτε ότι αν (X, ρ) είναι πλήρης μ.χ. και $X = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ όπου κάθε K_n είναι κλειστό υποσύνολο του X , τότε υπάρχει n_0 ώστε $(K_{n_0})^o \neq \emptyset$.

(ii) Δείξτε ότι αν ο (X, ρ) είναι πλήρης και αφιθμήσιμος, έχει ένα τουλάχιστον μεμονωμένο σημείο.

(iii) Δείξτε ότι στο $(\mathbb{Q}, \rho_{|\mathbb{Q}|})$ δεν υπάρχει ισοδύναμη μετρική ρ_1 ώστε (\mathbb{Q}, ρ_1) να είναι πλήρης μ.χ.

(β) Εστω $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-1 και συνεχής.

(i) Δείξτε ότι το σύνολο $f[\mathbb{Q}]$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

(ii) Δείξτε ότι $\overline{f[\mathbb{Q}]}$ είναι υπεραριθμήσιμο.