

~~Νευμαν~~

## ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

### ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ» ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Μαθηματικού

ΑΘΗΝΑ 4/7/2008, ΩΡΑ: 12.00

Άλωση:  $y u_x - x u_y = 0$

Θέμα 1<sup>ο</sup>: (α). (Mov. 0,25).

Αν  $u(x,y) = f(x^2 - y^2)$ , βρείτε μία μερική διαφορική εξίσωση που δέχεται ως λύση τη  $u = u(x, y)$ .

(β). (Mov. 1,25).

Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

$$x u_x + y u_y + u = 1,$$

όταν  $u(x,y) = x$  πάνω στη καμπύλη  $y = x^2$ ,  $x > 0$ .

Άλωση:  $u(x,y) = \frac{y^2}{x^3}$

(γ). (Mov. 0,25).

Να χαρακτηριστεί ο τύπος της διαφορικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} a &= x, \quad b = y, \quad c = 1-u \\ x &= x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) = 5 \\ \frac{dx}{ds} &= x', \quad \frac{dy}{ds} = y', \quad \frac{dz}{ds} = z' \\ x(s) &= s, \quad y(s) = s^2, \quad z(s) = 5 \\ x &= s, \quad y = s^2, \quad z = 5 \end{aligned}$$

(ηλικής γραφής)

$$u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos x)^2 u_{yy} - 5(\sin x)u_y = 0, \quad u = u(x, y).$$

Γραφηματικής γραφής

Θέμα 2<sup>ο</sup>: (Mov. 1,75).

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 5\rho \cos 2\varphi, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\frac{\partial u(1, \varphi)}{\partial \rho} = \frac{\partial u(2, \varphi)}{\partial \rho} = 0.$$

Θέμα 3<sup>ο</sup>: (Mov. 1,5).

Με χρήση της συνάρτησης Green, να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad \underline{x} = (x, y) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty),$$

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial \underline{n}} = g(y), \quad y \in (-\infty, \infty),$$

όπου  $f, g$ , γνωστές συναρτήσεις και  $\underline{n}$  η εξωτερική κάθετος.

Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον  $\mathbb{R}^2$ :

$$E(\underline{x}; \underline{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}.$$

α) ιδιοτυπίες β) χρειάζεται  $r(x)$  γ)  ~~$\hat{u}_t = (-is)^2 \hat{u}(s,t)$~~   $\frac{d}{ds} \hat{u}_t = -s^2 \hat{u}$   $\|\hat{u}\|_r^2$

Θέμα 4<sup>o</sup>: (Mov. 1,8).  $(g_n, y_n(x)) = \left(1 - (n - \frac{1}{2})^2, \sin((n - \frac{1}{2})x)e^x\right)$

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

(β) Να δώσετε μία σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από το πρόβλημα αυτό.  $\mu y'' - 2\mu y' + \lambda \mu y = 0 \Rightarrow \mu' = -2\mu \Leftrightarrow \mu(x) = e^{-2x} = r(x)$

(γ) Να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) - 2y'(x) + 3y(x) = e^x \sin 3x, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Θέμα 5<sup>o</sup>:

(α) (Mov. 1,5). Να αναπτυχθεί η μέθοδος επίλυσης του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = a, \quad u(L,t) = b, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

(β) (Mov. 0,5). Να περιγραφεί ο τρόπος επίλυσης του (α) αν τα  $f, a, b$ , είναι:  $f = f(x,t), a = a(t), b = b(t)$ .

Θέμα 6<sup>o</sup>: (Mov. 1,2).

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να λυθεί (τυπικά) το πρόβλημα:

$$u_{xx} = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u = u(x,t),$$

$$u(x,0) = f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Σχεδιάστε τη λύση στο  $t = 0, 1$  και για κάθε  $t > 0$ .

(Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει λύση και ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier.)

Δίνονται:

$$1. F\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{isx} dx = \hat{u}(s,t),$$

$$2. F^{-1}\{\hat{u}(s,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,t) e^{-isx} ds = u(x,t),$$

$$3. F\left\{\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}\right\} = (-is)^n \hat{u}(s,t).$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

Ενω  $-is \hat{u}_t = -s^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u}_t = -is\hat{u} \Rightarrow \hat{u}_t + is\hat{u} = 0 \rightarrow APA:$   
 $\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s) e^{-s^2 t} = \frac{1}{1+s^2} e^{-s^2 t} \Rightarrow u(s,t) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} g(x-s, t) dx$   
 ήπου  $g(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2 t} e^{-x^2/4s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/4t}$