



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»
Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 30/6/2009, ΩΡΑ: 08:30

Θέμα 1° :

(α) (Μον. 1.25). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$x_1 u_{x_1} - u_{x_2} + u = 1, \quad 1 - x_2$$

$$u(x_1, 0) = x_1.$$

(β) (Μον. 0.25). Να προσδιορίσετε τον τύπο της διαφορικής εξίσωσης:

$$x_1^2 u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + 2x_1 x_2 u_{x_1 x_2} + u_{x_2} + u = 0, \quad u = u(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Θέμα 2° : (Μον. 1.75).

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 5\rho \cos \varphi, \quad 2 < \rho < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u(2, \varphi) = \sin 3\varphi, \quad u(4, \varphi) = 5 \cos \varphi.$$

Θέμα 3° : (Μον. 1.75).

Να βρεθεί η συνάρτηση Green του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta u(x_1, x_2) = x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}, \quad (x_1, x_2) \in (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty),$$

$$\frac{\partial u(0, x_2)}{\partial \eta} = \frac{x_2}{2 + x_2^2}, \quad x_2 \in (-\infty, +\infty),$$

όπου η είναι το εξωτερικά κατευθυνόμενο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο. Να δοθεί η λύση του προβλήματος σε ολοκληρωτική μορφή.

Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον

$$\mathbb{R}^2 : E(\underline{x}; \underline{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\underline{x} - \underline{x}'|, \quad \underline{x} = (x_1, x_2).$$

Θέμα 4° : (2 μον.)

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + 2y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Ποια είναι η συνάρτηση βάρους; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(γ) Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) + 2y'(x) + \Lambda y(x) = g(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

για διάφορες τιμές του $\Lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{U} = W + V \\ \Delta W = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta V = 5\rho \cos \varphi \Rightarrow V = A\rho^3 \cos \varphi \quad V_{\varphi\varphi} = -A\rho^3 \sin \varphi$$

$$V_p = 3A\rho^2 \cos \varphi$$

$$V_{pp} = 6A\rho \cos \varphi$$

(δ) Να αναπτύξετε σε γενικευμένη σειρά Fourier (ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος), την συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$, για $0 < x < 1$.

$$V_{pp} + \frac{1}{\rho} V_p + \frac{1}{\rho^2} V_{\varphi\varphi} =$$

Θέμα 5° : (2 μον.)

(α)(μ.1,5). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την

$$\text{εξίσωση θερμότητας: } \begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 2T, & 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0,t) = L, \quad u(L,t) = L^2, & t > 0, \\ u(x,0) = Tx^2 + Lx, & 0 < x < L, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Αντικαθ. δοθ.} \\ \text{Ορίσκεται } A = \frac{5}{8}. \\ \text{οποια } V = \frac{5}{8}\rho^3 \cos \varphi \end{matrix}$$

όπου T, L θετικές σταθερές.

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, αν παριστάνει (αδιάστατη) θερμοκρασία.

(β)(μ. 0,5). Να περιγράψετε τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = Q(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = a(t), \quad u(L,t) = b(t), & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

$$\Delta W = 0$$

$$W(\rho, \varphi) = P(\rho) \Phi(\varphi)$$

Θέμα 6° : (1μον.)

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να λυθεί το πρόβλημα :

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & -\infty < x < \infty, \quad y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier και ότι η u είναι φραγμένη. Είναι η λύση $u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{y^2 + (x-s)^2} ds$, (τύπος Poisson για το ημιεπίπεδο) ;

Δίνονται:

1. $\mathbf{F}\{u(x,y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{isx} dx = \hat{u}(s,y),$
2. $\mathbf{F}^{-1}\{\hat{u}(s,y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,y) e^{-isx} ds = u(x,y),$
3. $\mathbf{F}\{u_{xx}(x,y)\} = (-is)^2 \hat{u}(s,y),$
4. $\mathbf{F}^{-1}\{e^{-y|s|}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + x^2},$
5. $\mathbf{F}^{-1}\{\hat{f}(s)\hat{g}(s)\} = (f \otimes g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi) d\xi, \quad \text{συνέλιξη.}$