

② Mètodos Διαρροών (des Key 2 J. Logan)

Eras εναργεμένως χρήστος λύσης των (8), οπόια
 $\varepsilon \ll 1$, είναι η πέδιλος Διατροφής, αναγνωρίζει
 λύση των, πορείας $q = q_{10} + q_{11}\varepsilon + q_{12}\varepsilon^2 + \dots$
 τοπικής σχήματος $q_1 = \frac{1}{q} - \varepsilon$ γερανεύεται:

$$= \frac{1}{q_0} - \varepsilon q_1 \frac{1}{q_0^2} + \dots - \varepsilon \quad (9) \quad \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1,$$

$$\left\{ \frac{1}{q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{q_1}{q_0} + \varepsilon^2 \frac{q_2}{q_0} + \dots} = \frac{1}{q_0} \frac{1}{1+A} - \varepsilon = \right.$$

$$= \frac{1}{q_0} \left(1 - \frac{q_1}{q_0} \varepsilon + \varepsilon^2 \frac{q_2}{q_0} - \dots \right) \text{ għal lu } \frac{1}{1+A} = 1 - A + A^2 -$$

Էջանակը օգոս իմաս բայց այս առ է
չեմ ո (9) ՏԻՎԵՒ:

$$\text{b) } \sigma(1) = \sigma(\varepsilon^0) : \left\{ \begin{array}{l} q'_b = \frac{1}{q_{b_0}} \\ q_b(0) = 0 \end{array} \right\} (10)$$

$$-11-\text{và} \exists \text{ems } 0(\varepsilon): \left\{ q_1' = -\frac{q_1}{q_2} - 1, q_1(0) = 0 \right\}_{(11)}$$

$$\text{Risový - 20 (10): } \bar{q}_0 = \sqrt{2} |z|^0$$

$$\text{Λύνουμε το (11): } q_1' + \frac{1}{2z} q_1 = -1 \Rightarrow$$

$$g_1(z) = -\frac{2z}{3}, \quad z \neq 0$$

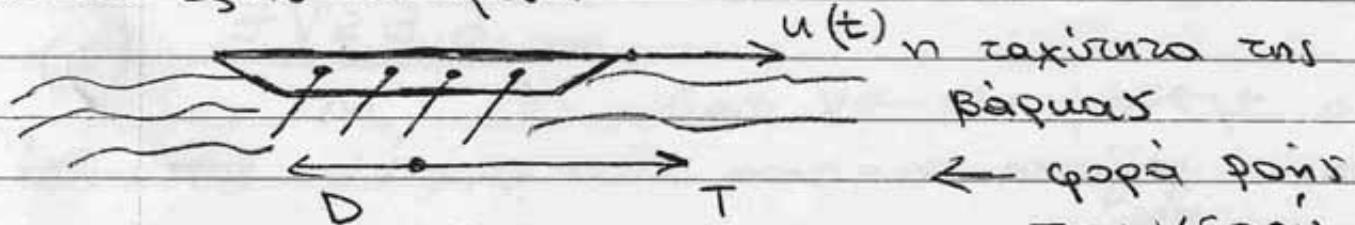
$$q(z) = q_0 + q_1 z + \dots = \sqrt{2} z^{\frac{1}{2}} - 2 z^{\frac{1}{2}} \varepsilon + \dots \text{ way}$$

$$u(300) = u_0 q(1) \approx u_0 (\sqrt{2} - 2\varepsilon)^3 = u_0 \cdot 1,3758 = \\ = 32,027032 \text{ m/sec},$$

(since $q = q_0 z = 300 z \Rightarrow z=1$ we $u_0 = [\frac{w-B}{w} 340]^{1/2}$).

9. ΚΙΝΗΣΗ ΒΑΡΚΑΣ ΜΕ ΚΩΠΗΛΑΤΕΣ

Η γιών μιας βάρκας γε μωμόδες καθορίζει
από τις εγίς δυάρες:



Tunisia Divides and was annexed

D aviculae wu Vepou

Toxic $\frac{du(t)}{dt} > 0$ on $T > D$ & $\frac{du(t)}{dt} < 0$ on $T < D$

Arlo zo 2° vjro Nwma 'exoue'

$$\gamma = \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{M} (T - D), \text{ iea M n raja tuis bafus.}$$

Esox b'ou èxiste 8 aménages sur P n roxis
-en valens : S

- ④ Συνολικός ιόχος = λιμνοτροφία διαρροής × ταχύτητα
in 8 P = TU
 - ⑤ Η ανιστάσαν του νερού (από πενταδεκάδα)

$$D = b S u^2, \text{ σε } \text{η} \text{ προσδιορίζεται} \text{ ως} \\ \text{βάρος, } b \text{ σταθερά αναλογίας.} \\ \text{Από } M \frac{du}{dt} = T - D = \frac{8P}{u} - b S u^2 = b S \left(\frac{8P}{b S} u^{-1} - u^2 \right) \\ = b S \left(v^3 u^{-1} - u^2 \right) \text{ ινα } v^3 = \frac{8P}{b S} \text{ σα.}$$

Eun ! exalte

$$\left\{ \frac{u du}{\sqrt{3-u^2}} = \frac{b s}{M} dt, \quad u(0) = 0 \right\} \quad (1)$$

H xion (còn gọi là olong) sau (11)
còn:

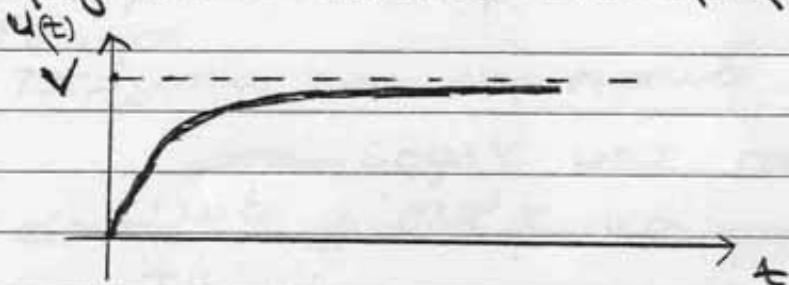
$$\left[\frac{BP}{bs} \right] = \left(\frac{L}{T} \right)^{1/3} = L^{1/3} \cdot T^{-1/3}$$

↓
 variables ↓
 variables

$$\ln \frac{u^2 + uv + v^2}{(u-v)^2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{v+u}{v\sqrt{3}} \right) = \frac{6bsvt}{M} \quad (2)$$

Για $t \rightarrow \infty$, $u(t) \rightarrow v$ σκλ.

Είναι η γενιοτη ταχύτητα που γραφεί να επενδει.



Από το παρόντα διάγραμμα της χιώς (2)
συγκρίνουμε δια οι αντιτίτες η προσαρδήσιση
των αρκιν και πεύκων τη γενιοτη ταχύτητα επενδει-
ση (Σες την γένον της παραπάντι, επιτάχυνση
 $\frac{du(t)}{dt}$) και αυτή η προσαρδήσιση τέχνη και πεύ-
κων σταθερή ταχύτητα v.

10. ΕΙΣΟΔΕΙΣ ΘΗΡΕΥΤΟΥ (ΚΥΝΗΓΟΥ) - ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ (PREDATOR-PREY)

Εσώς οι έχουμε δύο γηγενητών $x=x(t)$, $y=y(t)$.
δύο είδην που αναρριχούνται για την εύρεση
τροφής ή μάρτισ αλλά φυσικό πόρο.

Συγβολίζουμε για $y=y(t)$ τον γηγενητό του θηρευ-
τή και για $x=x(t)$ το γηγενητό του θηράμα-
τος. Για την παραπάντη ενός τετού μη
μάναψε της εγίνει παραδοχές:

① Όταν $y=y(t)=0$ τότε ο $x(t)$ αυξάνεται
και συγχέοντας την γηγενητή δημ. $\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t)$
 $a > 0$. dt

Επίσης, δεν πρόβλεψε δια τουνέξτης (αυτό απέτοντογείται
δεν πρόβλεψε μεράγοντας αριθμούς ψαριών, δημ. με το video=Έχου-
με διακρίτες εικόνες αλλά σε μόνη φανέται συνέχεις)

① Όταν $x(t)=0$, ο δημιουργός βαθμοία εξαπλωνεται
Σημ. $\frac{dy(t)}{dt} = -\beta y(t)$, $\beta > 0$

② Ο αριθμός των συναρτήσεων μεταξύ των είναι
ανάλογος του χιλοφέντου των αυτοκοίχων γηθυν-
μών. Οι συναρτήσεις εμποιούνται από την αύξηση του γη-
θυντού του δημιουργού και εμποδίζεται την αύξηση του
αριθμού των δημιουργών.

Με τις παρείνων παραδοξίες οι A. Lotka -
V. Volterra το 1925-26, στην πραγματικότητα γνώστης
της αγγελιδραστικής των είδων και βάση στοιχια
του είχαν συγκεντρωθεί από το D' Ancona για
την αγίστια στην Αδριατική θάλασσα, πατέρων
στο ανθρώπινο σύστημα εξιτώσεων:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases} \quad (1) \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

γνωστό ως σύστημα Lotka-Volterra.

Το σύστημα (1) είναι η γραμμής και δεν έχει
ένα αναγνωριστικό λύση. Μπορεί να είναι να γραφεί-
σουν τη λύση αριθμητικά ή να πάντης ποιοτική
μετάνοια ώστε να δούμε τις φερτές χαρακτηριστικές των
λύσεων.

(a) Αριθμητική λύση (Μεθόδος Euler)

Θα παρουσιάσουμε ως' αρχήν τη βασική ιδέα
της μεθόδου για τις εξίσωσην.

Εσώς $I = [a, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ και $f: [a, \beta] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
δέχονται να βρούνται για συνάρτησην $y: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$
τέτοια ώστε

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)), \quad a \leq t \leq \beta, \\ y(a) = y_0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Υποθέτουμε ότι το (2) έχει λύση ως είναι γραμμική συνάρτηση (π.χ. αν $f \in C^1$). Θεωρούμε το διαφερόντος $\alpha < t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$. Οι αριθμητικές φέδοδοι για την επίλυση του (2) δίνουν συντεταγμένες για τις τιμές $y(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Το γεγονότο γιατί οι φέδοδοι είναι σχοινότερες από τα διαφερόντα, δηλ. $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$ ώστε $t_k = \alpha + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Οι προεπιλογές της δίνεται με φίξη h είναι:

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k), \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \left\{ \begin{array}{l} (3) \\ \end{array} \right.$$

για $y(t_0) = y(\alpha) = y_0$ δεδομένο.

Ενας τρόπος για να κατανευαδώσει τη φέδοδο Euler είναι ο εξής: Στο (2) για $t=t_n$ δίνεται

$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$ ή προεπιλογές (είναι δυνατόν ν' αγγίξεις) τη $y'(t_n) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$, οπού πληρώνεται την βήμα (3), για $y(t_n) \approx y_n$, ($y(t_n)$ λύση του (2) εντός y_n λύση του (3)). Η φέδοδος αυτή γενικεύεται για ωντηφάρα. Αν έχουμε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(t, x, y), \quad x(\alpha) = x_0, \quad t \in [\alpha, \beta] \\ \dot{y} = g(t, x, y), \quad y(\alpha) = y_0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

Τότε η φέδοδος Euler (για ομοιότερο διαφερόντος) δίνεται:

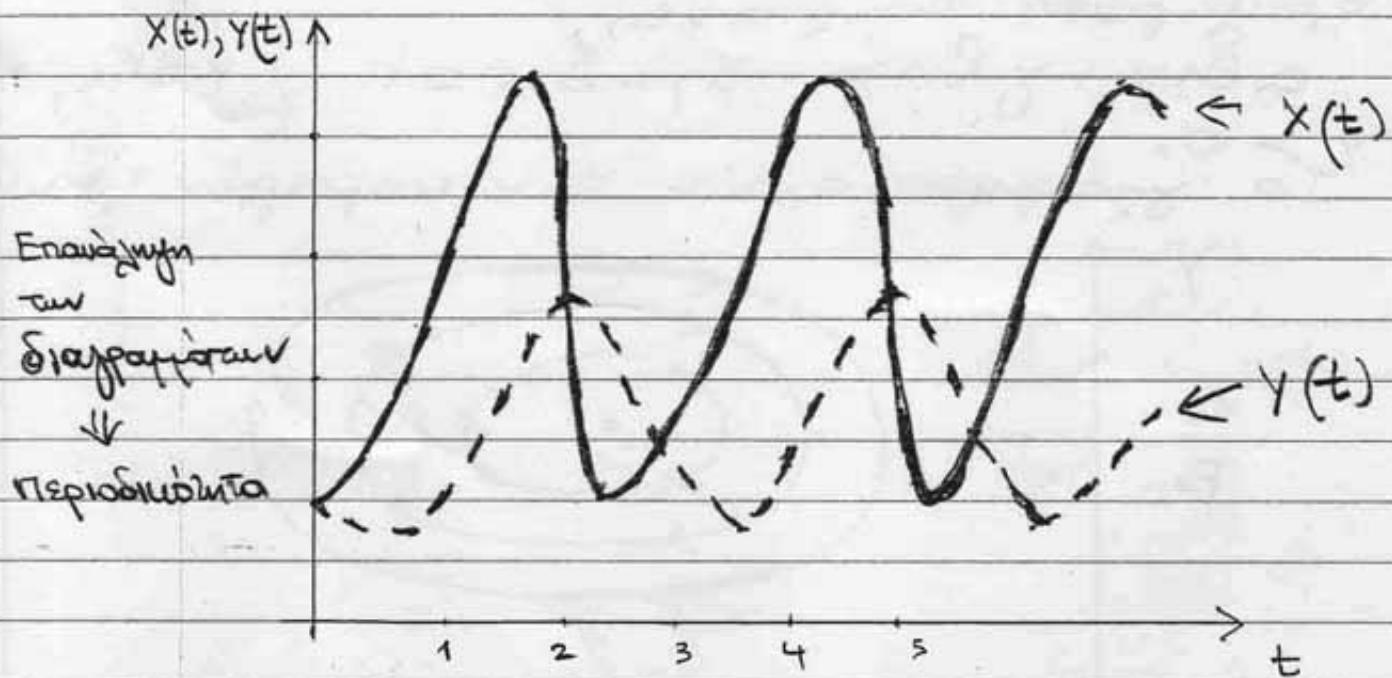
$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k, y_k), \quad x(\alpha) = x_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (5) \\ \end{array} \right.$$

$$y_{k+1} = y_k + h g(t_k, x_k, y_k), \quad y(\alpha) = y_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

Το (5) γιατί το πρόβλημα (1) γενικεύεται:

$$x_{k+1} = x_k + h (\alpha x_k - \beta x_k y_k), \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

$$y_{k+1} = y_k + h (-\gamma y_k + \delta x_k y_k), \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (6)$$



(α) $x = x(t)$ Σήραγγα, $y = y(t)$ Ιημερίς

ΣΧΗΜΑ 1

Χρησιμοποιούνταις αυτήν την αριθμητική μέθοδο και για $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=\frac{5}{2}$, $\delta=1$, $x(0)=x_0=1$, $y(0)=y_0=1$ πουλούνται το γράφημα του σχ. 1. Παρατηρούνται ότι η συγκεριμένη της χρήσης είναι περιοδική. Αυτή την περιοδική συγκεριμένη παραβιάζει την διάτηξη και από το επίπεδο φασμάτων (δες σχήμα 2).

(β) Ποιοτική ανάλυση

Μετατρέπεται το πρόβλημα (1) σε επίπεδα φάσματα του. Αναγράφονται τα χρόνο:

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \quad \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \right\} (7)$$

και στα σημεία: $\left\{ \alpha x - \beta xy = -\gamma y + \delta xy = 0 \right.$

To (7) γε ε αναγράφεται τι δίνει:

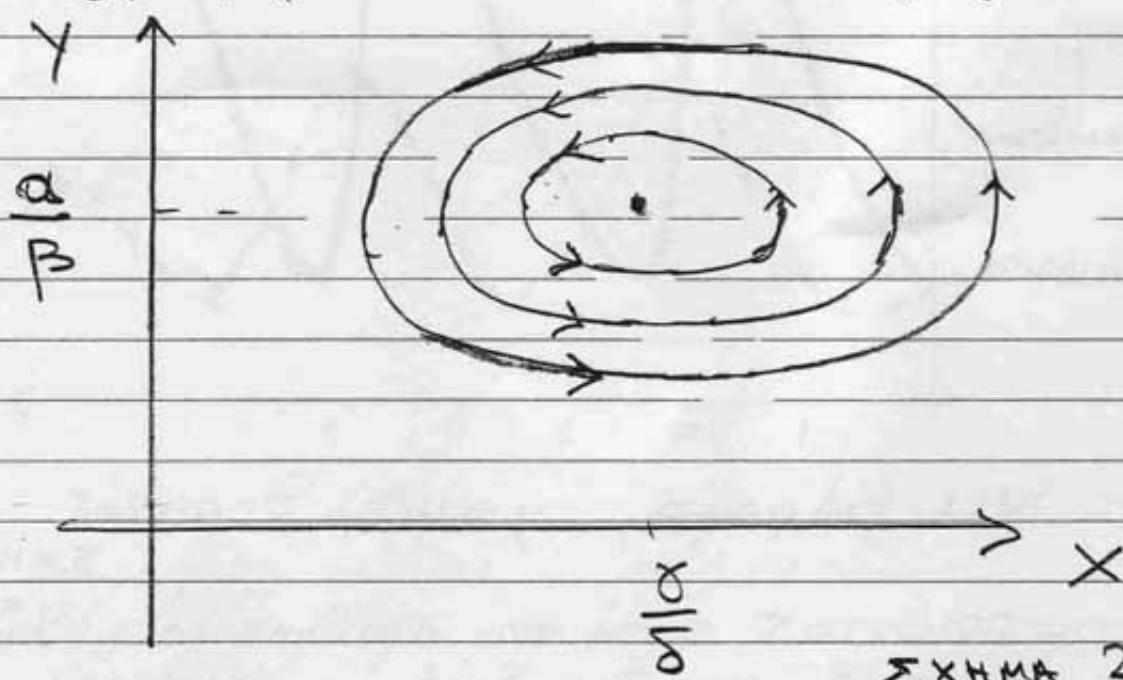
$$\frac{dx}{\alpha x - \beta xy} = \frac{dy}{-\gamma y + \delta xy}$$

γε ορθογώνιων πολιγωνών,

$$\alpha \ln y + \gamma \ln x - \beta y - \delta x = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$x, y > 0.$$

To γράφημα αυτών των καρπών είναι:



ΣΧΗΜΑ 2

Παρατηρήστε τη περιοδική συγχρόνωση των κύρων.

Tis καρπών του σχημ. 2 φαίνεται να τις πατασινάσσει και γε ε χρήση του Mathematica. Έτσι παρασκήνω τις συχνές εντολές, (παράρτημα A). Επίσης στο παράρτημα B περιγράφεται η φύσης των Euler γε ε χρήση της του Mathematica.

(Δες εινών φωτογραφία από τα βιβλία των Boyce & Diprima μαθήσεις εινών και από του Γρεκοχώρα.

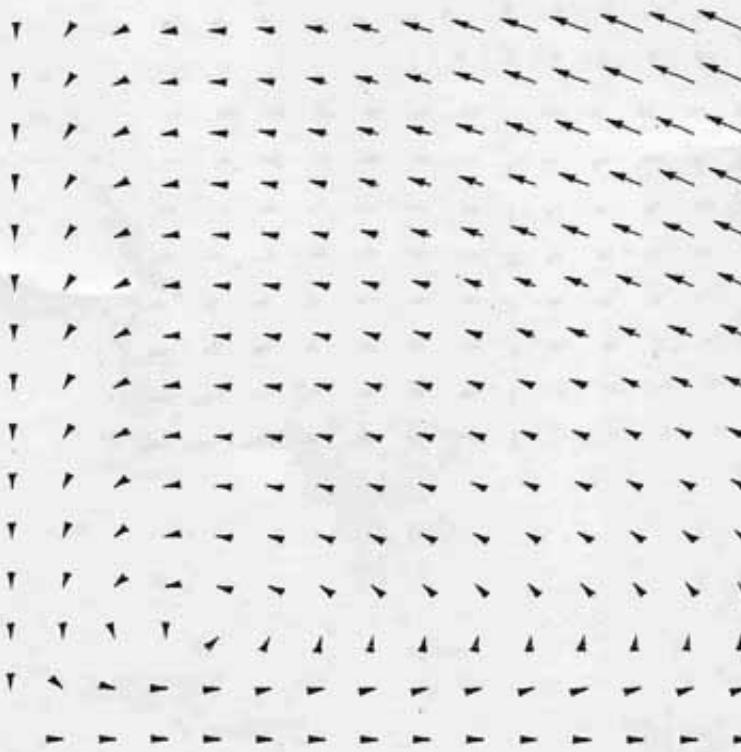
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

In[1]:= Needs["Graphics`PlotField`"]

In[2]:= ? PlotVectorField

PlotVectorField[f, {x, x0, xl, (xu)}, {y, y0, yl, (yu)}, (options)]
produces a vector field plot of the two-dimensional vector function f.

In[3]:= PlotVectorField[{3*x - 2*x*y, -5/2*y + x*y}, {x, 0, 10}, {y, 0, 10}]



ΕΧΗΛΙΑ 3

Out[3]= - Graphics -

(PREDATOR-PREY)

ΘΗΡΕΥΤΙΚΕΣ - ΕΠΑΡΤΗΜΑ

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad ; \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{-\gamma y + \delta xy}{\alpha x - \beta xy} \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy$$

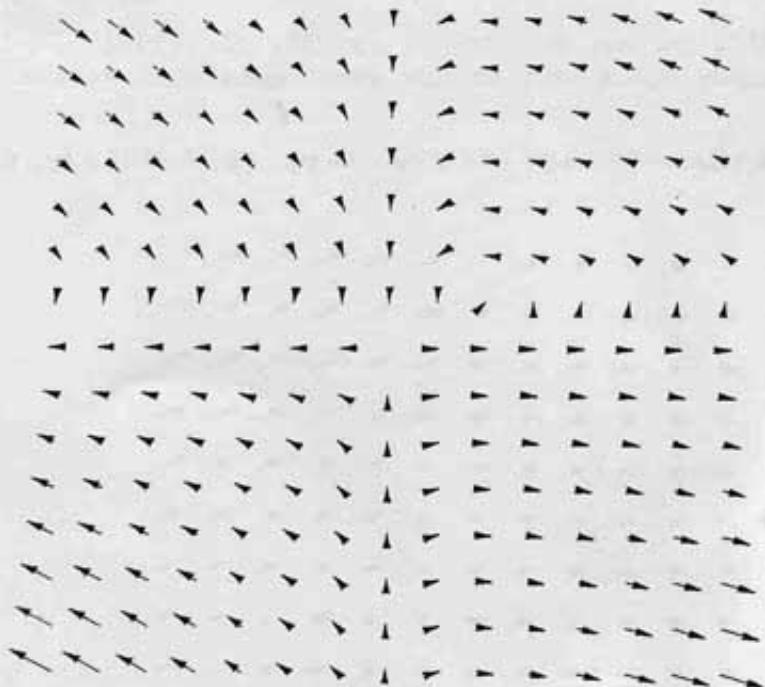
$y = y(t)$ Θηρευτικός

$x = x(t)$ Επαρτήμα

$x, y > 0$

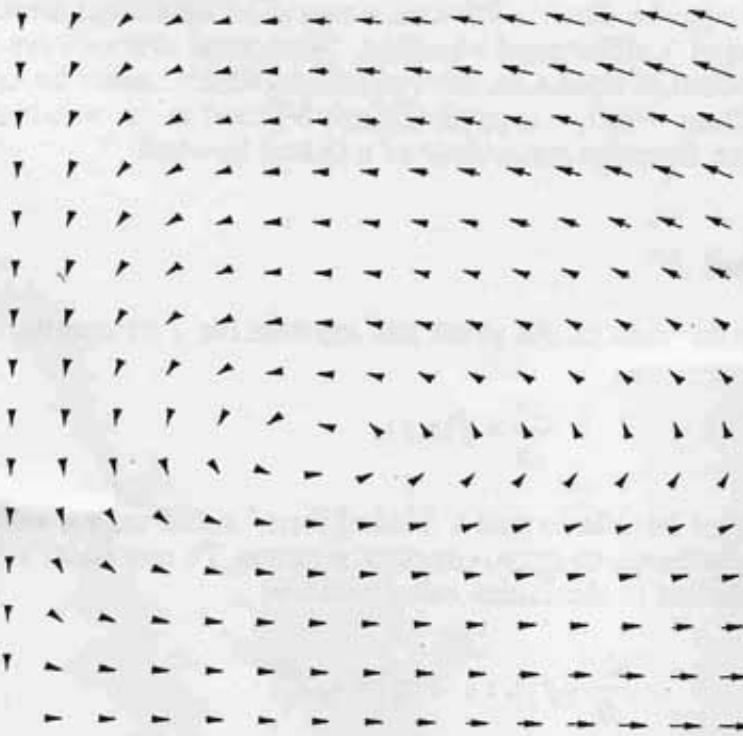
ΣΥΝΕΧΕΙΑ

In[4]:= PlotVectorField[{3*x - 2*x*y, -5/2*y + x*y}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]



Out[4]= - Graphics -

In[6]:= PlotVectorField[{12*x - 3*x*y, -4*y + x*y}, {x, 0, 10}, {y, 0, 10}]



ΣΧΗΜΑ 4

Out[6]= - Graphics -

ΣΥΝΕΞΙΑ

ΣΤΑΣΙΑ ΣΗΜΕΙΑ

$$\begin{aligned} \alpha x - \beta xy &= 0 \\ -\gamma y + \delta xy &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} y_0 = \frac{\alpha}{\beta} \\ x_0 = \frac{\delta}{\gamma} \end{array} \right\}$$

• ΣΧΗΜΑ 3 : $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = \frac{5}{2}, \delta = 1$

• ΣΧΗΜΑ 4 : $\alpha = 12, \beta = -3, \gamma = 4, \delta = 1$

Project 11

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Differential Equations: Euler's Method

-30-

Introduction

In this project you explore *Euler's Method*, a so-called numerical method for approximating the solution of a differential equation. Numerical methods are extremely important, since most differential equations have solutions which cannot be expressed in terms of elementary functions. Next, you apply Euler's Method to the non-linear differential equations which describe the motion of a batted baseball.

Part I. Euler's Method

If you were to stop the man on the street and ask him for a differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

it is likely that you would not be able to find a "closed form" solution, but would have to use some sort of numerical scheme to approximate a solution. To use *Euler's Method* for finding an approximate solution to the initial value problem

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

a "step size" h is chosen and $x_n = x(t_0 + nh)$ is computed from x_{n-1} using the formula

$$x_n = x_{n-1} + h f(t_{n-1}, x_{n-1}), \text{ where } t_n = t_0 + nh.$$

It is not hard to convince yourself that the smaller h is, the better the approximation generated. Let's look at an example. Here is a *Mathematica* procedure implementing Euler's Method. Study it and make sure you understand what is going on.

```
euler[f_, {t_, t0_, t1_, h_}, {x_, x0_}] :=
  Module[{ti, xi, graph},
    ti = t0; xi = x0;
    graph = {{t0, x0}};
    While[ti < t1, xi =
      N[xi + h f/.{t->ti, x->xi}];
      ti = ti + h;
      AppendTo[graph, {ti, xi}]];
    ListPlot[graph]
  ]
```

ENTER

Here $f[t, x]$ is the right hand side of the differential equation, t_0 and t_1 are the beginning and ending values of the first variable, x_0 is the beginning value of the second variable, and h is the step size.

Let's try this on a problem to which we know the answer and compare the approximate solution with the actual solution.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2000} P(1000 - P), P(0) = 20.$$

The solution is $P(t) = \frac{1000}{49e^{-t/2} + 1}$. Begin by drawing a picture of the solution on the interval $0 \leq t \leq 15$:

```
pic1 = Plot[1000/(49 Exp[-t/2] + 1),
{t, 0, 15}] ENTER
```

Now draw a picture of the approximations:

```
f[t_, P_] := P (1000 - P) / 2000 ENTER
```

```
pic2 = euler[f[t, P], {t, 0, 15, .5}, {P, 20}] ENTER
```

To compare the pictures:

```
Show[pic1, pic2] ENTER
```

Try a few different values of the step h and see how the approximate solution changes.

Exercises

1. Use Euler's Method to solve $\frac{dx}{dt} = x^2 - t^2, x(0) = -1$ for $0 \leq t \leq 2$. Plot the solutions using $h = 0.2$ and 0.02 on the same picture.
2. Use Euler's Method to solve an interesting initial value problem of your choice. Experiment with different values of the step h to find a reasonable one. Convince us your choice of h is reasonable. (We are easily convinced by pictures.)

Part II. Systems of equations and baseball

Frequently we need to solve a system of differential equations, rather than just one. This is nicely handled by using the idea of a list. Thus a system of four equations

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{dx_4}{dt} &= f_4(t, x_1, x_2, x_3, x_4)\end{aligned}$$

can be written

$$\frac{dw}{dt} = f(t, w)$$

where $w = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, and $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, and the same recipe for Euler's Method is valid if we interpret the appropriate symbols as lists. To illustrate, suppose we wish to find the trajectory in two dimensions of an object (a baseball, for instance). If $\{x, y\}$ is the position of the object and $\{v_x, v_y\}$ is the velocity of the object, then one of Newton's laws gives us the above equation with $w = \{x, y, v_x, v_y\}$ and

$f = \left\{v_x, v_y, F_x/m, F_y/m\right\}$, where m is the mass of the object and $\{F_x, F_y\}$ is the force on the object. For a baseball, we shall assume there are only two forces acting on the ball in flight: gravity and air resistance, usually called the *drag* force. The drag force acts in the direction opposite the velocity, and its magnitude is given by

$$\frac{1}{2} C_D \rho A v^2$$

where C_D is the so-called drag coefficient, A is the cross sectional area of the ball, ρ is the density of the air, and v is the speed of the ball. Thus the drag force is proportional to the square of the speed, $F = -cd v^2$ and the "constant" of proportionality is $cd = (1/2) C_D \rho A$. For a 50 degree, 0 % humidity day, at sea level, $cd = 0.00285858$, where the speed is given in feet/second. Now a *Mathematica* procedure for Euler's method applied to this problem is

```
battedball[w0_, f_, h_] := Module[{t, w, gg},
  gg = {Take[w0, 2]};
  t = 0; w = w0;
  While[N[w[[2]]] >= 0,
    w = N[w + h f[t, w]];
    t = t + h;
    AppendTo[gg, Take[w, 2]]];
  ListPlot[gg]
]
```

ENTER

Try this (be sure to **Clear[f]**, etc., from the previous examples):

Clear[f] ENTER

II. B

-33-

```
f[t_,w_] := {w[[-2]],w[[-1]],
  - cd w[[-2]] Sqrt[w[[-1]]^2 + w[[-2]]^2],
  - cd w[[-1]] Sqrt[w[[-1]]^2 + w[[-2]]^2] - 32
} ENTER
```

cd = 0.00285858 ENTER

```
battedball[{0,0,180 Cos[Pi/6], 180 Sin[Pi/6]},f,0.1]
ENTER
```

Here the initial speed is 180 feet/second, and the launch angle is 30 degrees above the horizontal. Study this example carefully. (If w is a list, then $w[[n]]$ is simply the n th element in the list w , and for example, $w[[-2]]$ denotes the second from the last entry in the list.)

Exercises

3. Repeat the example above for several different values of the time step h . What seems to be a reasonable value for h ? Explain.
4. Draw the trajectory of a ball in which the launch angle is 30 degrees, the initial speed is 180 feet/second, and suppose there is no air resistance. Draw this on the same axes with the example above.
5. On the same axes, draw the trajectories of the ball assuming a 50 degree, 0 % humidity day at sea level, and an initial speed of 180 feet/second for launch angles of 15, 30, 45, and 60 degrees. What seems to be the best launch angle?
6. Water vapor is lighter than air, so the density of air is less on a hot humid day than it is on a cool dry day, and consequently cd is smaller. In fact, if the temperature is 90 degrees and the humidity is 100 %, then $cd = .0024438$. Does a batted ball travel significantly farther on a hot humid day than it does on a cool dry day? Draw some pictures of trajectories to support your answer.

Reference

R. G. Watts, A. T. Bahill, *Keep Your Eye On the Ball, The Science and Folklore of Baseball*, New York, 1990.