

1) Από το βιβλίο των Διαφορικών Εξισώσεων των BOYCE & DI PRIMA
 σελ. 555 - 577 - 1-
 - κ - κ - κ - του ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ και ΒΕΡΓΟΥΡΧΙΑΣ του Σ. ΤΡΑΧΑΛΑ
 ΣΗΜΕΙΩΣ ΣΕ ΕΙΣ σελ. 157 - 194

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η Μαθηματική Προτυποποίηση (ΜΠ) έχει ως σκοπό
 να ματασκευάσει - ματασκρίψει, λογικές και χρησιμές
 εξισώσεις (μαθηματικά πρότυπα ή φορμές) που
 αναπαραστίζουν ή προσεχίζουν φυσικές διαδικα-
 σίες που συμβαίνουν στην πραγματικότητα.
 Τέτοιες διαδικασίες μπορεύν να προέρχονται από τη
 φύση, τη Χημεία, τη Βιολογία, τη Οικονομία
 ή Βιοηγιανική Λεραιγή κ.λπ..

Τα ΜΠ τα χωρίζουμε σε δύο κύριες κατηγορίες:

(a) τα Προσδιοριστικά (deterministic, νιερμπινιστικά) και (b) τα Στοχαστικά (Stochastic models, probabilistic models). Στα προσδιοριστικά ΜΠ η τιγιά της παρατηρήσεων $y=y(x)$
 δεν αποτελείται σε σφάλλα δικτύου, γιατί δε τιγιά
 της x προσδιορίζει να βρούμε απρόβιας την $y=y(x)$.
 Αντίθετα στα στοχαστικά πρότυπα η τιγιά
 $y=y(x; \epsilon)$ εξαριστεί από το ε που είναι
 ένα τυχαίο σφάλλα όχι ρέον τηγιά $E(\epsilon) = 0$.
 Στη συνέχεια θα γλετσιστούμε πέρα προσδιοριστικά πρότυπα.

• κατασκευή ΜΠ: Για την ματασκευή ενός ΜΠ
 απολογιζούμε τα παρακάτω γενικά βήματα.

(a) Πρώτον πρέπει να ματασκευάζεται τη φύση της διαδι-
 κασία. Καθορίζουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της
 (β) Γράφουμε εξισώσεις, για την αριθμούσιον
 αυτών των χαρακτηριστικών, σε μαθηματική φόρμη.
 Αν υπάρχει ίδιη μαθηματική διεύθυνση ακόμα οι

αγάπη ο "τύποι" της είναι πρότυποι, τα τε προτυπών-
με για μαθησιακή απόδοση στη φυσική διάστημα
η μελέτη των από την αρχή, να απορροφηθεί
το ΜΠ. Αναγνωρίζεται - μετανεμόμενη προβολή της
του να είναι δυνατόν να επιμελούνται (προστική θεωρία)
η να φεύγουν (προστική θεωρία) και να περι-
χρέψουν επαρκώς το φυσικό πρόβλημα (οι ερ-
σινοί, ότι μάλλον "τύποι" πρέπει να γίνονται
η να φύγουν να φεύγουν).

(γ) Συγχρίνονται τη γένοντας περιφερειακά δίδα-
κτενα. Βελτιώνονται το ΜΠ από αυτά χρησιμεύονται.
Το απορροφώνται περαιτέρω και συγκριθε-
νούνται περισσότερα χαρακτηριστικά. Αρχιγου-
με την ίδια διαδικασία από την αρχή.
Εποριγγώνται - φεύγονται τις συνέπειες του ΜΠ
χιλιάρια περιφερειακών διαδικασιών.

• Μεθόδοι έργων: Οι γένοδοι οι οποίες
βασίζονται για την παρασκευή είσος ΜΠ είναι:

(α) φυσικές αρχές, νόηση ή π.χ. διαίρεσης
μέρες, ορίση, ενέργειας κ.λπ..

(β) Απειρωτικά ηρεμήση (ανάγνωση), έτσι
παταχάνεται η απορροφή των εξισωτών.

(γ) Θίσουνται αρχικατηνά εξισώσεις οι οποίες
τερματίζονται να απορροφώνται βασικά χαρακτηρισ-
τικά του φυσικού προβλήματος (διαίσθηση).

(δ) Διαδικασίαν ανάγνωση (δες Κεφ. 1, Τ. Logan).

(ε) Αρχές και τεχνικές του λογισμού των γετα-
βολών (δες Κεφ. 3, Τ. Logan).

(ζ) Μέθοδοι διαταραχών (δες Κεφ. 2

Τ. Logan) -

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε συγκεκριμένα φυσικά προβλήματα ώστε να περιγράψουμε τη μεταποίηση πρωτόποτων τους.

1. ΜΟΛΥΝΣΗ ΣΕ ΛΙΜΝΗ

Θεωρούμε ότι έχουμε για λίμνη όγκου V σε μέτρα μέτρα, και $V = \text{σταδέρο}$ (οι τωχινές ανιώγησης αναπροσώνονται από εισροή υδάτων). Επίσης υποθέτουμε ότι είναι γονιζόντη και η γόχνων είναι αριθμός παραγόμενης σ' όχο των όγκων V . Συγχρονίζουμε τη $x = x(t)$ τη συγκεντρώση (πυανότητα) της γόχνων από μέτρα μέτρα και έστω $r = \text{σταδέρο}$ ο ρυθμός γενερούμενος για τον αριθμό της ύδατας της λίμνης εξόρχωσης από αυτήν (π.χ. λόγω εξατμίσεων). Για να έχουμε V σταδέρο πρέπει να έχουμε εισροή υδάτων (π.χ. βροχοπτώσεις).

Αν η εισροή γόχνων σταθατήσει, δίλεγχε να δούμε σε πόσο χρόνο η λίμνη θα απομεινάσει άηγη. Ήταν η γόχνων θα γίνει αφεντικά (μέτων του 5%) και την προϋπόθεση ότι η γόχνων εξόρχεται με την εισροή υδάτων.

$$\text{Εξροή} = \text{Εισροή} \\ (\text{εξάτμιση} \text{ μ.λπ.}) \quad (\text{βροχοπτώσεις} \text{ μ.λπ.})$$

ΛΙΜΝΗ

\checkmark σταδέρος

$$\text{ΟΠΙΚΗ ΜΟΛΥΝΣΗ} = x(t) V$$

$$x = x(t) \text{ Μόγνων} / m^3 \quad \text{Ρυθμός} = r = \text{σταδ.}$$

$$\text{Ρυθμός} \text{ Μεταβολής} \text{ Μόγνων} = \text{Εισροή} \text{ Μόγνων} - \text{Εξροή} - \dots$$

$$\frac{d}{dt} \frac{x(t)V}{m^3} = 0 - r \cdot x(t) \quad \text{η} \quad \frac{d}{dt} \frac{x(t)}{V} = - \frac{r}{V} x(t)$$

μεν $x(t_0) = x_0$ ν αρχικού ρήγματος για $t = t_0$.
 Για $a = \frac{r}{V} > 0$, παιρνουμε $x(t) = x_0 e^{-a(t-t_0)}$
 δηλ. έχουμε απότομη μείωση του x . Θέλουμε να
 βρούμε το t^* για να έχουμε $x(t^*) = x_0 \cdot 0,05$
 δηλ. για $t \geq t^*$ ν μόλις τον είναι αργάτεα.
 Εποι έχουμε $e^{-a(t^*-t_0)} = 0,05 \Rightarrow t^* = t_0 - \frac{V}{r} \ln 0,05 =$
 $= t_0 + \frac{V}{r} \ln 20 \approx t_0 + 3 \frac{V}{r}$.

Μαρίαδημαρία Λιβνικ από της Η.Π.Α.

- (M) Michigan : $V = 4,871 \cdot 10^9 \text{ m}^3$, $r = 433,092,096 \text{ lt/sec}$
 (E) Eire : $V = 458 \cdot 10^9 \text{ m}^3$, $r = 479,582,208 \text{ lt/sec}$
 (S) Superior : $V = 12221 \cdot 10^9 \text{ m}^3$, $r = 173,619,904 \text{ lt/sec}$

μεν

$$\begin{aligned} t_{M}^{*} &\approx 2861 \text{ μέρες} \approx 7,8 \text{ χρόνια} \\ t_{E}^{*} &\approx 33693 \text{ ημ.} \approx 92 \text{ -} \\ t_S^{*} &\approx 2004965 \text{ ημ.} \approx 562 \text{ -} . \end{aligned}$$

To παραπάνω ΜΤT είναι αρκετά αργό να δινει
 μια αυτοδοξή πρόβλεψη. Είναι βέβαιοι για προ-
 τέξσιον της πραγματικότητας της. Τιμορίσαμε
 ότι το $x(t)$ είναι πλανήτης ήδη γέννηση στη γη
 (καιρός παραγγελίας σε Σ.Δ.Ε. διαμορφώσια σε νοσα-
 χήγαγε σε Μ.Δ.Ε.). Επίσης θεωρήσαμε ότι η
 μόλις τον δεν διαφοροποιήσατε ανέγκαια για της ηπο-
 ρές (σε για τέτοια λεπτοποίησην θα είχαμε περισ-
 σσινες Σ.Δ.Ε.). Τέλος θεωρήσαμε τα V και r
 συναρρίστηκαν ότι έχαριζανταν από το χρόνο.

Άσυντον : Αν η εποχή της ρήγματος είναι ανάλογη του
 τερματίνεται της ρήγματος είναι η εποχή γίνεται για ρυθμό
 $r = \text{const.}$. Ήδη είναι η τελείωση ρήγματος για $t \gg 1$.

2. ΡΑΔΙΕΝΕΡΓΕΙΑ - ΕΦΘΕΤΙΚΗ ΜΕΙΩΣΗ

Ξέραμε ότι τα φαδίενεργά υγιά είναι αυστηρά και σε δεδομένη χρονική στιγμή έχει ποσοστό αύξησης για να διαιρούνται από αυτά ενώ "νέου" σωτηρίους για διαφορετικές χρήσεις ιδιότητες (ραδιοιόσηνα). Η φαδίενεργη έχει σωτηρίους είναι ανάλογη των αριθμών των αύξησης του σωτηρίου. Αν $N(t)$ ο αριθμός των αύξησης του σωτηρίου που διασπώνται, ο ρυθμός διάσπασης ή ρυθμός φτεταργίας της φάσης είναι $\frac{dN(t)}{dt}$ δηλ. Ο $N(t)$ στην φανέλα του χρόνου, τοπ. $\frac{d}{dt}$ έχουμε,

$$\frac{dN(t)}{dt} \propto N \quad (\frac{dN}{dt} \text{ είναι ανάλογη του } N(t)).$$

$$\text{Άρα } \left\{ \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N, \lambda > 0, N(t_0) = N_0 \right\}, \quad (1)$$

λ ο συνεχείς αναρρόφησης. Το N φυλίζεται επιδεινώς. Μέρος διάσπασης είναι ο χρόνος ημίσειας γιατίς του (χρόνος υποδιγματοποίησης). Άνω την πέραρχη Αρχικής Τιμής (π_{AT}) (1). Τοποθετούμε $N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$.

$$\text{Άν } t^* \text{ ο χρόνος υποδιγματοποίησης, τότε } \frac{N(t^*)}{N(t_0)} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow t^* = t_0 + \frac{\ln 2}{\lambda} \approx t_0 + 0,693. \quad \frac{N(t)}{N(t_0)} = \frac{1}{2}$$

Το λ πρέπει να περιμένεται. Το t^* για τον άνθρωπο 14 (C_{14}) είναι 5568 χρόνια, για το ουράνιο 238 (U_{238}) είναι 4,5 εκατ. χρόνια.

Άσυντον: Άν το t^* για τον C_{14} είναι 5568 χρόνια να προσθετούμε το \rightarrow τον C_{14} .

3. ΕΝΑ ΑΠΟ ΒΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

Ενδιαφέροντας να δούμε πως ένας ή περισσότεροι γνησιοί πληθυντικοί είδην γεταβάζονται και το χρόνο (δεν έχουμε χωριστή εξάρτηση).

Εσώ $x = x(t)$ ο γνησιός είναι άνδρας, $x \geq 0$, $t \geq 0$.
Αν ο πυθός γεταβάζει είναι ανάλογος του γνησιού ($\dot{x} \propto x$ σημ. ο πυθός γεννήσεων είναι το πυθό Γεννήσεων, είναι ανάλογος του γνησιού) τότε έχουμε $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = kx(t), \\ x(0) = x_0, \quad t > 0 \end{array} \right\}, (1)$

κ θεωρίαν σταθερά (πα το $k=0$, $k < 0$ ο γνησιός είναι ανδρώναχα σταθερός, τυπικός). Η λύση του ΠΤΑΤ (1) είναι:

$$x(t) = x_0 e^{kt} \text{ και } x(t) \rightarrow \infty \text{ όταν } t \rightarrow \infty$$

αν $x_0 > 0$. Άντοντας ΜΤ δεν αναπομπίνεται στην προγραμματισμένη (άπειρη γνησιοί είδην). Ο αριθμός $x(t)$ αρέσει να είναι γεριόσυνος π.χ. λόγω της διαδεσμούς τροφής, απότομας κατανεύειν αγόραστων ή της διαδεσμούς τροφής είναι ισχυρός και $A - B X$ (η τροφή παραπέραν της πυθός A , μετανιώνεται και πυθός ανάλογος του x). Είναι ο αριθμός γεννήσεων είναι ανάλογος του γνησιού και της διαδεσμούς τροφής δηλ. ανάλογος του γνησιού:

$$\frac{dx(t)}{dt} \propto x(A - Bx) \quad (\propto \text{σημαίνει ανάλογο})$$

Αν είναις οι διάνοιαί είναι ανάλογοι του x ($\frac{dx}{dt} \propto -cx$, $c > 0$) τότε μετατίθεμε στο εξής ΜΤ:

$$\frac{dx}{dt} = kx(A - Bx) - cx = x(KA - KBx - c) =$$

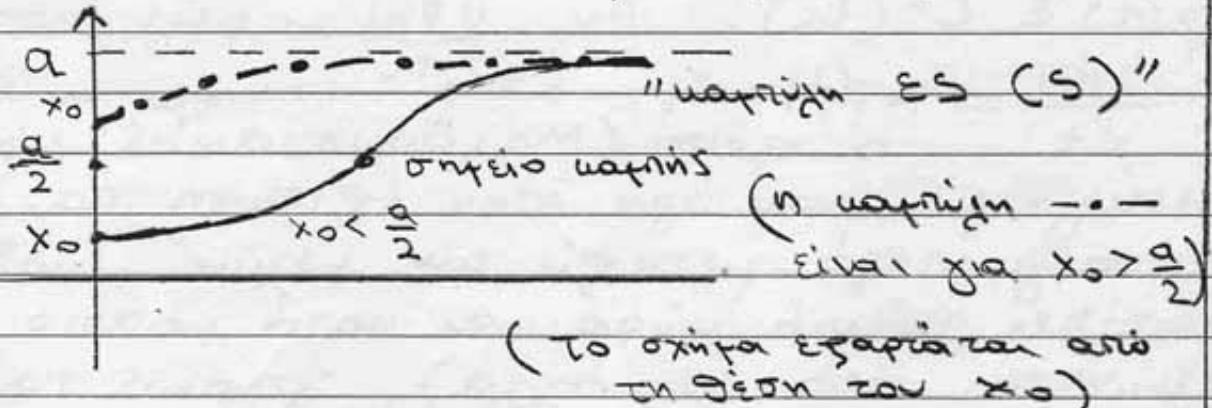
$$= KBx \left(\frac{A}{B} - x - \frac{c}{KB} \right) = \beta x(a - x), \quad (1)$$

όπου $\beta = KB$, $a = \frac{A}{B} - \frac{c}{KB}$. Η (1) μαζίζει
λογιστική (logistic) εξίσωση.
Η λύση της είναι:

$$x(t) = \frac{a x_0}{(a - x_0) e^{-\alpha t} + x_0}, \quad x_0 = x(0).$$

Παρατηρούμε ότι $x(t) \rightarrow a$ όταν $t \rightarrow \infty$.

Αυτή η συγκεκριμένη είναι η προβολή μειώσεων απογόνων. Τιμοθεατικά μετρούνται κατανομή πιστούς τα a και β . Ενα πιο απλής ΜΤ θα ήταν αν τα $a = a(t)$, $\beta = \beta(t)$ δηλ. συναρτήσεις του t , π.χ. ενδρεση των εποχών, αντε
νόμοι αστού τα a & β θα είναι προβολή μειώσεων π.χ. $a(t) = k \sin(\omega t + \phi)$, λαταρίδα.



Σημείωση: Για να βρούμε τα x_0 , a , β χρησιμότερες είναι μετρήσεις των αριθμητικών. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση για $t = 0$ δηλ. για το $x(0)$ και
την άλλη για $t = t_1$, που απειπούνται ως \hat{x}_1 .
Στη συνέχεια διαφέρει των αριθμητικών της a , β ,
μετρώντας $x = x(t)$ n λύση της (1) γι' αυτό¹
τις τιμές x_0 και \hat{x}_1 είναι διαφορετικές. Αν $x(t_1) \neq \hat{x}_1$,

Επικαλύπτονται ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις των α, β (λίστα ψευδών Runge-Kutta) και ψευδών καράκτην προσεγγίσεων (το μαθηματικής ή βρίσκομε επίσης π.χ στα λογιστικά MATLAB) συνέχιζουν τις διαδοχικές προσεγγίσεις ψευδή $X(t_1) \approx \hat{X}_1$. Τα α, β της βρίσκομε ψευδή από n-βιτφάρα και δίνουν την την $X(t_1) = X_n(t_1)$ είναι οι γνωστές τιμές των α, β . Η ψευδός αυτή γεννάει τα πάστα των γεράτων (π.χ. στατιστικές).

4. ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ (ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ)

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα γηπετυχό $p(t)$ (π.χ. ανθρώπων) οριείται τεχνικό (λογβάνεται προσεγγίστικα ως C^1 συνάρτηση, επειδή έχει διαφορικές εξισώσεις ανά εξισώση διαφορών) έτσι $p(t) \in C^1(\mathbb{R})$. Αν $\frac{dp(t)}{dt} < p(t)$ τότε

$$\frac{dp(t)}{dt} = k p(t), \quad \text{και } k > 0 \quad \text{έχουμε απετακή}$$

$\frac{dt}{dt}$ αύξηση (Μαχθουσιανός νότος).

Είσαι γιατί έχαν άρα στις εξισώσην που επιβάλλεται παραγωνιστής ψευδή των "ψην" (καθε ψευδή παρέχει γενικό χώρο και μάλιστα πάντα τρόπο μειώνεται από τον άλλο), γεγονός που προκαλεί γένων του γηπετυχού (μπορεί να προέρχεται η γένων ναι από γενανδοτικές ασθένειες).

Έχουμε ότι ο στατιστικός ψησ ου αριθμού τυχαίων συναντήσεων δύο γεγών του γηπετυχού είναι $p^2(t)$. Επομένως η εξισώση γράφεται:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \alpha p - \beta p^2, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (\text{λογιστική})$$

εξισώσων, ευρίξτηκε το 1837 από τον Ολλανδό Verhulst). Γενικά είναι βέβαιο, ότι όταν ο P δεν είναι πολύ μεγάλος $\frac{dP}{dt} \approx \alpha P$ και η εξουσία αποτελείται από τον.

Αν το P είναι μεγάλο, ο όρος $-\beta P^2$ γίνεται η πιο σημαντικός και το $\frac{dP}{dt}$ γίνεται μικρότερο (π.χ. σ' ένα πρώτο βιομηχανολόγικό $\frac{dP}{dt}$ και πρώτο το β είναι μεγάλος, λόγω των λεπτών περιστάσεων, των φαρμάκων κ.λπ.). Κυρίως χρησιμοποιείται την εξισώση αυτή για να "προσβλέψεται" την εξίσημη για την "αγορά" πληθυσμού.

Αντανακλά την εξισώση στα $\alpha, \beta > 0$,

$$\left\{ \frac{dP(t)}{dt} = \alpha P - \beta P^2 = \beta P \left(\frac{\alpha}{\beta} - P \right), P(t_0) = P_0 \right\} \quad (1)$$

$$\int_{P_0}^{P(t)} \frac{ds}{as - \beta s^2} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

$$\alpha(t-t_0) = \ln \frac{P}{P_0} \left| \frac{a-\beta P_0}{a-\beta P} \right|.$$

Ο όρος $\frac{a-\beta P_0}{a-\beta P} > 0 \quad \forall t \geq 0$, (όταν $t=0$ εμφανίζεται)

$$P_0 < \frac{a}{\beta}, \text{ αφού } P(t) = \frac{a P_0}{\beta P_0 + (a - \beta P_0) e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

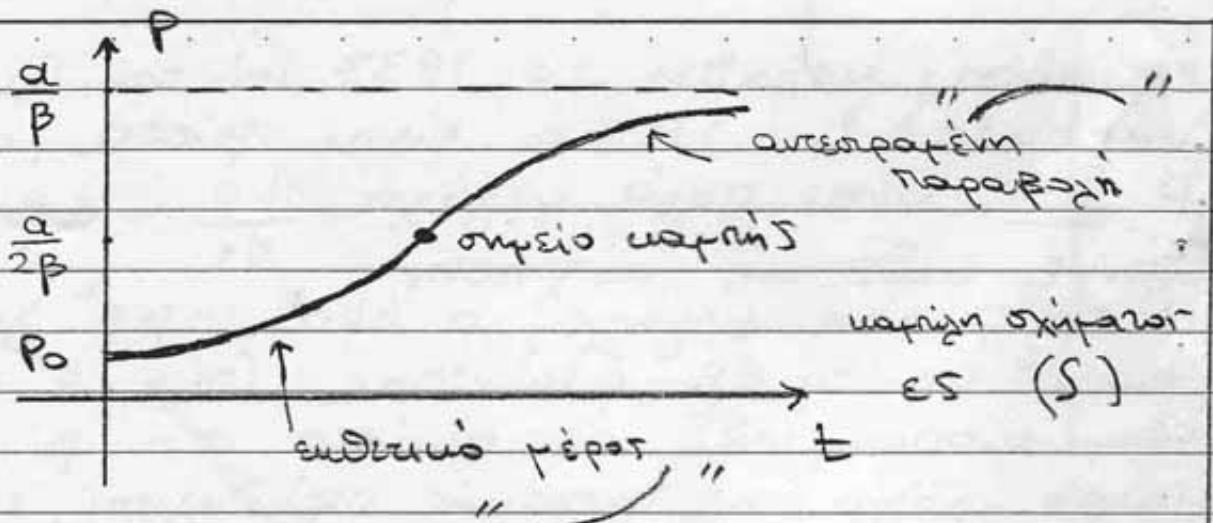
και $P(t) \rightarrow a/\beta$ όταν $t \rightarrow \infty$.

Επιστρέψτε εξουσίες

$$P'' = \frac{d^2P}{dt^2} = \alpha P' - \beta 2P P' = P'(\alpha - 2\beta P) = P(\alpha - \beta P).$$

αφού $P'' > 0$ ούτος $P < \frac{a}{2\beta}$ και $\alpha - 2\beta P > 0$

$P < 0$ ούτος $P > \frac{a}{2\beta}$, $P(t) = 0$ για $P = \frac{a}{2\beta}$ συγκεκρινώς.



Τα α , β αναφέρονται για τις παράγουσες (ωφελεστικές) (vital coefficients). Τα α , β πρέπει να επαναρροστούν πάντα με την ίδια τρόπο χρόνια, όχι με είδησην που αφέγονται σαν τεχνολογίαν αναπτυξήν, μόλυνση περιβάλλοντος, κοινωνικά καινότημα κ.λπ.. Θα φιλοροισταρει να έχειε χωριστικές εγκατίσεις για μάλιστα αριθμό (που θρεπτικής φύσης, πυρα, Ε.Π.), γυναικείων αριθμών, πυρα, Ε.Π.) γυναικείων, πυρα, Ε.Π.).

Για $\alpha = 0,29$, $\beta = 2,695 \cdot 10^{-12}$, $P_0 = 334 \cdot 10^7$, $t_0 = 1965$, όπου το ΜΠ σε άρθρο το 1970 ήδη είναι $P(2000 \text{ χρονού}) = 5,96 \cdot 10^7$ διοικητικά γυναικείων της γης.

5. ΧΗΜΙΚΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ (Chemical reaction)

Εστιν ιδητική για χονδρούς χημική αντίδραση δύο ουσιών (στοιχείων) A, B, τότε $A + B \rightarrow P$. Τα ύστοια των A ήταν συγχρόνως τα της των B δίνουν το P. Ουσιών μετατρέπεται σε συγχένεση (εργάζονται μαζίν στη γονιδία του άγνωστου αριθμού της αριθμού ανά οχυρό) των A και B τόσο μετατρέπεται σεται