

Άσκηση (1):

Α.Μ. / -1-

Βρείτε τις εγχειρίδες Hamilton για τα παρακάτω:

(α) $J(y) = \int_a^b xy \sqrt{y'} dx$

(β) $J(y) = \int_a^b \sqrt{x^2+y^2} \sqrt{1+(y')^2} dx$

Λύση

(α) $H = -L + y' L_{y'} = -xy \sqrt{y'} + y' \left(\frac{xy}{2\sqrt{y'}} \right) = -\frac{1}{2} xy \sqrt{y'} = L_{y'} = p$
 $= \left(\frac{x^2 y^2}{4} \right) \frac{1}{2\sqrt{y'}} = -\frac{x^2 y^2}{4p} = H(x, y, p)$

Εξ. Hamilton $y' = -\frac{\partial H}{\partial p} = + \frac{x^2 y^2}{4p^2}$

$p' = \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{x^2 y}{2p}$

(β) $H = -L + y' L_{y'} = -\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{1+y'^2} + y'$
 $\cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot 2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} \quad (1)$

$\left\{ \begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+y'^2}} y' = p &\Rightarrow \frac{y'^2}{1+y'^2} = \frac{p^2}{x^2+y^2} \\ y'^2 = \frac{1}{x^2+y^2-p^2} &\Rightarrow y' = \pm \frac{1}{(x^2+y^2-p^2)^{1/2}} \end{aligned} \right. \quad (2)$

$\hookrightarrow \sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{p} y' = \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{p (x^2+y^2-p^2)^{1/2}}$

$H = \mp \frac{x^2+y^2}{p (x^2+y^2-p^2)^{1/2}} \pm \frac{1}{(x^2+y^2-p^2)^{1/2}} =$

$= \mp \frac{(x^2+y^2-p)}{p (x^2+y^2-p^2)^{1/2}} \quad \bullet \quad p' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial p}$

2) Παράδειγμα (Αρμονικός Ταλαντωτής)

Η Lagrangian είναι

$$L = L(t, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k y^2.$$

Η κανονική ορμή (canonical momentum) είναι:

$$p = L_{\dot{y}} = m \dot{y}, \quad L_{\dot{y}\dot{y}} = m \neq 0 \Rightarrow$$

λύνουμε ως προς \dot{y} άρα $\dot{y} = \frac{p}{m} = \varphi(t, y, p).$

Η Hamiltonian είναι

$$H = -L + \dot{y} L_{\dot{y}} = \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k y^2 \right) + \left(\frac{p}{m} \right) p = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} k y^2 = E_{kin} + E_{pot} = E.$$

Η κανονική μορφή ως εξίσωση Euler είναι:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -k y \end{aligned} \right\} \text{εξισώσεις Hamilton}$$

Αν λύσουμε αυτές τις εξισώσεις στο γρ-επίπεδο (αναφορικά του dt) τότε έχουμε

$$\frac{dp}{dy} = \frac{-ky}{p/m} \quad \text{ή} \quad p dp + km y dy = 0 \Rightarrow$$



$$\underline{p^2 + km y^2 = \text{σταθ.}}$$

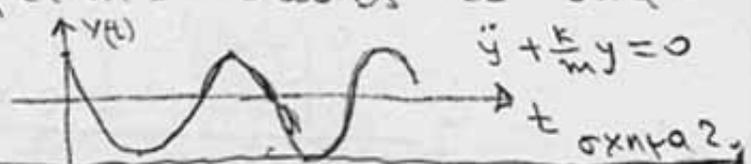
Η γεωμετρική εξίσωση παριστάνει για ομοζήνια ελλείψεις στο γρ-επίπεδο (στο επίπεδο φάσεων).

Στο $t = t_0$ αντιστοιχεί (y_0, p_0) που μας δίνει την ελλείψη εκείνη που το σύστημα ακολουθεί.

Σ' αντίθεση με το επίπεδο φάσεων, μπορούμε να λύσουμε την $\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$ (λίση της εξίσωσης Euler)

$$\text{η οποία δίνει } y(t) = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Ετσι έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες το δωμάτιοι για συστήματος, (σχήμα 1, 2).



ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Για Lagrangian περισοτίρων συναρτήσεων δίνεται
 $L = L(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) = L(t, \underline{y}, \underline{\dot{y}})$

ορίζουμε την n -κανονική ορμή (canonical momenta)

$$p_i = L_{\dot{y}_i}(t, \underline{y}, \underline{\dot{y}}), \quad i=1, 2, \dots, n \quad \text{και αν}$$

$\det(L_{\dot{y}_i \dot{y}_j}) \neq 0$ μπορούμε να λύσουμε την προηγούμενη
ισότητα ως προς \dot{y}_i έτσι παίρνουμε

$$\dot{y}_i = \varphi_i(t, \underline{y}, \underline{p}), \quad i=1, 2, \dots, n$$

Η Hamiltonian ορίζεται

$$H = -L + \sum_{i=1}^n \dot{y}_i L_{\dot{y}_i}(t, \underline{y}, \underline{\dot{y}}) = -L(t, \underline{y}, \underline{\varphi}) + \sum_{i=1}^n \varphi_i p_i$$

Όπως στη περίπτωση για $n=1$ η κανονική μορφή των
εξισώσεων Euler είναι

$$\dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad i=1, 2, \dots, n, \quad H = H(t, \underline{y}, \underline{p})$$

Άσκηση (3): Βρείτε την εξίσωση Euler-Lagrange
του παρατηρητή:

$$J(z) = \iint_D \left[\frac{1}{2} (z_{xx}^2 + z_{yy}^2) + \nu z_{xx} z_{yy} + (1-\nu) z_{xy}^2 \right] dx dy, \quad \nu \text{ σταθερά.}$$

Λύση

Δίνεται $J(y) = \iint_D \left[\frac{1}{2} (z_{xx}^2 + z_{yy}^2) + \nu z_{xx} z_{yy} + (1-\nu) z_{xy}^2 \right] dx dy$

Θα βρούμε την εξίσωση Euler για Lagrangian
 $L = L(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy})$ όπως στην σελ. 18
των σημειώσεων.

$$\delta J(y, h) = \frac{d}{d\varepsilon} [J(z + \varepsilon h)]_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \iint_D [L(x, y, z + \varepsilon h, z_x + \varepsilon h_x, z_y + \varepsilon h_y, z_{xx} + \varepsilon h_{xx}, z_{xy} + \varepsilon h_{xy}, z_{yy} + \varepsilon h_{yy})] dx dy \right\}_{\varepsilon=0} \quad \frac{\text{ραρ/ση}}{\text{κανόνας Αχούδω}}$$

$$= \iint_D [L_z h + L_{z_x} h_x + L_{z_y} h_y + L_{z_{xx}} h_{xx} + L_{z_{xy}} h_{xy} + L_{z_{yy}} h_{yy}] dx dy$$

N.M.7 - 3

$$= \iint_D (L_z h + L_{z_x} h_x + L_{z_y} h_y - h_x \frac{\partial}{\partial x} L_{z_{xx}} - h_x \frac{\partial}{\partial y} L_{z_{xy}} - h_y \frac{\partial}{\partial y} L_{z_{yy}}) dx dy$$

$$+ \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (h_x L_{z_{xx}}) + \frac{\partial}{\partial y} (h_y L_{z_{yy}} + h_x L_{z_{xy}}) \right] dx dy$$

$$= \iint_D \left(L_z - \frac{\partial}{\partial x} L_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{z_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} L_{z_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L_{z_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L_{z_{yy}} \right) h dx dy -$$

$$+ \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (h_x L_{z_{xx}}) + \frac{\partial}{\partial y} (h_y L_{z_{yy}} + h_x L_{z_{xy}}) \right] dx dy$$

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (h L_{z_x} - h \frac{\partial}{\partial x} L_{z_{xx}} - h \frac{\partial}{\partial y} L_{z_{xy}}) + \frac{\partial}{\partial y} (h L_{z_y} - h \frac{\partial}{\partial y} L_{z_{yy}}) \right] dx dy$$

ΤΥΠΟΣ GREEN ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

$$= I + \oint_{\partial D} \left[- (h_y L_{z_{yy}} + h_x L_{z_{xy}} + h L_{z_y} - h \frac{\partial}{\partial y} L_{z_{yy}}) \right] dx$$

$$+ \int \left[h_x L_{z_{xx}} + h L_{z_x} - h \frac{\partial}{\partial x} L_{z_{xx}} - \frac{\partial}{\partial y} L_{z_{xy}} \right] dy =$$

$$= I + 0 \quad (1) \text{ γιατί } h = h_x = h_y = 0 \text{ και}$$

$$z \in C^4(\bar{D}), \quad \text{H} \quad (1) \text{ με το ανάλογο βασικό}$$

λημμα δίνει την εξίσωση του Euler δηλ.

$$L_z - \frac{\partial}{\partial x} L_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{z_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} L_{z_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L_{z_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L_{z_{yy}} = 0$$

Ευαγγελική όταν $L = \frac{1}{2}(z_{xx}^2 + z_{yy}^2) + \tau z_{xx} z_{yy} + (1-\tau) z_{xy}^2$.

Η εξίσωση Euler είναι:

$$L_{z_{xx}} = z_{xx} + \tau z_{yy}, \quad L_{z_{xy}} = 2(1-\tau) z_{xy}, \quad L_{z_{yy}} = z_{yy} + \tau z_{xx}$$

$$z_{xxxx} + \tau z_{yyxx} + 2(1-\tau) z_{xyyx} + z_{yyyy} + \tau z_{xxyy} = 0$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

ΕΞΙΣΩΣΗ EULER

4 Άσκηση 4.15 Βιβλίου σελ. 157

Λύση Δίνεται το σκαρ/δέρ $J(u) = \iint_D [\alpha(u_x^2 + u_y^2) - b u^2] dx$
όπου $\alpha = \alpha(x, y)$, $b = b(x, y)$, $u = u(x, y)$.

Η αναγκαία συνθήκη για ακρότατο (συν/συσ παρών
γεωμετρικών σφαιρών σελ. 18) γράφεται:

$$\delta J(u, h) = \iint_D (L_u - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y}) h dx dy + \int_{\partial D} (-h L_{u_y}) dx + (h L_{u_x}) dy = 0 \quad (1)$$

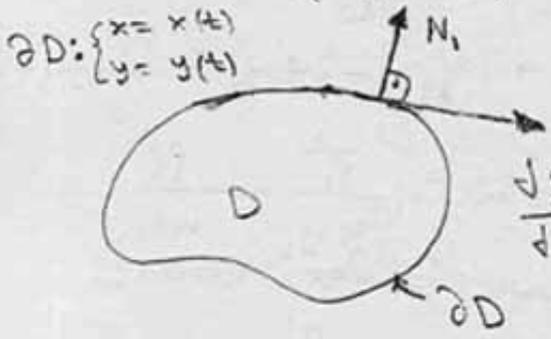
Η (1) ισχύει $\forall h = h(x, y) \in C^2(\bar{D})$, συνεπώς θα ισχύει και
τέτοια h που $h = h(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial D$. Τότε η (1), με τη
χρήση του ανιστόχου βαθμωτή λήψας, δίνει την επίσημη

Ευλέρ $L_u - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y} = 0 \quad (2)$, όπου
 $L = \alpha(u_x^2 + u_y^2) - b u^2$ δηλ. η Lagrangian του προβλήματος.

Επειδή ισχύει η (2) $\forall h \in C^2(\bar{D})$ η (1) δίνει

$$\int_{\partial D} h (-L_{u_y} dx + L_{u_x} dy) = 0 \quad \forall h \in C^2(\bar{D})$$

$$\Rightarrow -L_{u_y} dx + L_{u_x} dy = 0 \quad \hat{=} \quad -2\alpha u_y dx + 2\alpha u_x dy = 0$$
$$\hat{=} \quad 2\alpha (-u_y, u_x) \cdot (dx, dy) = 2\alpha (-u_y, u_x) \cdot d\vec{r} = 0$$



$$2\alpha \vec{N}_1 \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0, \quad \vec{N}_1 = (-u_y, u_x)$$

αλλά

$$(u_x, u_y) \cdot \vec{N}_1 = 0 \quad (3).$$

Άρα \vec{N}_1 κάθετος στην $\frac{d\vec{r}}{dt}$ δηλ. κάθετος

στο ∂D και $\hat{n}_1 = \left(-\frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right)$ μοναδιαίο

κάθετο. Η (3) δίνει $\alpha \nabla u \cdot \hat{n}_1 = 0 \Rightarrow \alpha \frac{du}{d\hat{n}_1} = 0$

και \hat{n}_1 μπορεί να θεωρηθεί ως εξωτερικό κάθετο

δηλ. $\hat{n}_1 = \hat{n} = \vec{n}$ τελικά $\alpha \frac{du}{d\hat{n}} = 0$.



5) Βρείτε την κανονική μορφή των εξισώσεων Euler

για τα παρακάτω:

(α) $J(y) = \int_a^b xy y'^2 dx$

(β) $J(y) = \int_a^b (x^2 + y_1 y_1'^2 + y_2 y_2'^2) dx$

Λύση

(α) Η Lagrangian είναι $L = L(x, y, y') = xy y'^2$,
η κανονική ορμή $p = L_{y'} = 2xy y' \Rightarrow y' = \frac{p}{2xy}$ (1)
Η Hamiltonian γράφεται:

$H = H(x, y, p) = -L + y' L_{y'} = -xy y'^2 + y' \cdot 2xy y'$
 $= -xy y'^2 + 2xy y'^2 = xy y'^2 \stackrel{(1)}{=} xy \frac{p^2}{4x^2 y^2} =$
 $= \frac{p^2}{4xy}$. Η κανονική μορφή των εξισώσεων Euler είναι:

$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{2xy}$ και $p' = -\frac{\partial H}{\partial y} = + \frac{p^2}{4xy^2}$

(β) Η Lagrangian είναι $L = L(x, y_1, y_2, y_1', y_2') =$
 $= x^2 + y_1 y_1'^2 + y_2 y_2'^2$

Οι κανονικές ορμές είναι $p_1 = L_{y_1'} = 2y_1 y_1'$
 $p_2 = 2y_2 y_2' \Rightarrow y_1' = \frac{p_1}{2y_1}, y_2' = \frac{p_2}{2y_2}$

Η Hamiltonian γράφεται:

$H = -L + y_1' L_{y_1'} + y_2' L_{y_2'} = -L + 2y_1 y_1'^2 + 2y_2 y_2'^2 = -x^2 + y_1 y_1'^2 + y_2 y_2'^2$
 $= -x^2 + y_1 \frac{p_1^2}{4y_1^2} + y_2 \frac{p_2^2}{4y_2^2} = -x^2 + \frac{p_1^2}{4y_1} + \frac{p_2^2}{4y_2}$

Η κανονική μορφή των εξισώσεων Euler είναι:

$y_1' = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2y_1}, y_2' = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{2y_2}$

$p_1' = -\frac{\partial H}{\partial y_1} = + \frac{p_1^2}{4y_1^2}, p_2' = + \frac{p_2^2}{4y_2^2}$



6) Να βρεθούν οι ακρότατες τιμές του συνάρτησης

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y^2 + (y')^2 - 2y \sin x] dx$$

όπου $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = B$ και βρίσκεται πάνω στην ευθεία λίμνη (ελεύθερα συνοριακά σημεία) $x = \frac{\pi}{2}$

Η αναγκαία συνθήκη ακρότατων δίνεται από την εξίσωση Euler που είναι:

$$L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} = 0 \text{ όπου } L = L(x, y, y') = y^2 + (y')^2 - 2y \sin x$$

$$\text{ή } L_y = 2y - 2 \sin x, \quad L_{y'} = 2y' \text{ οπότε}$$

εξ. Euler

$$L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} = 2y - 2 \sin x - 2y'' = 0 \text{ ή } \boxed{y'' - y + \sin x = 0}$$

Το πρόβλημα είναι γει ελεύθερα συνοριακές τιμές δηλ. το B πρέπει να προσδιοριστεί. Επειδή $(\frac{\pi}{2}, B) \in$ συν ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$, θα δίνεται από την σχέση $L_{y'}(\frac{\pi}{2}, y(\frac{\pi}{2}), y'(\frac{\pi}{2})) = 0$ ή

$$2y'(\frac{\pi}{2}) = L_{y'} = 0 \Rightarrow \boxed{y'(\frac{\pi}{2}) = 0} \text{ (2) εφόσον έχουμε } \boxed{y(0) = 0} \text{ (3)}$$

Οι (1), (2), (3) θα δώσουν τις ακρότατες τιμές. Λίγότερο την (1) $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad y_g = y_0 + y_p \text{ όπου}$$

$$y'' - y + \sin x = 0 \text{ ή } y_p = A \cos x + B \sin x \Rightarrow A=0, B=1$$

$$\text{οπότε } \boxed{y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x}$$

$$\text{αλλά } y(0) = \underline{c_1 + c_2 = 0} \text{ και}$$

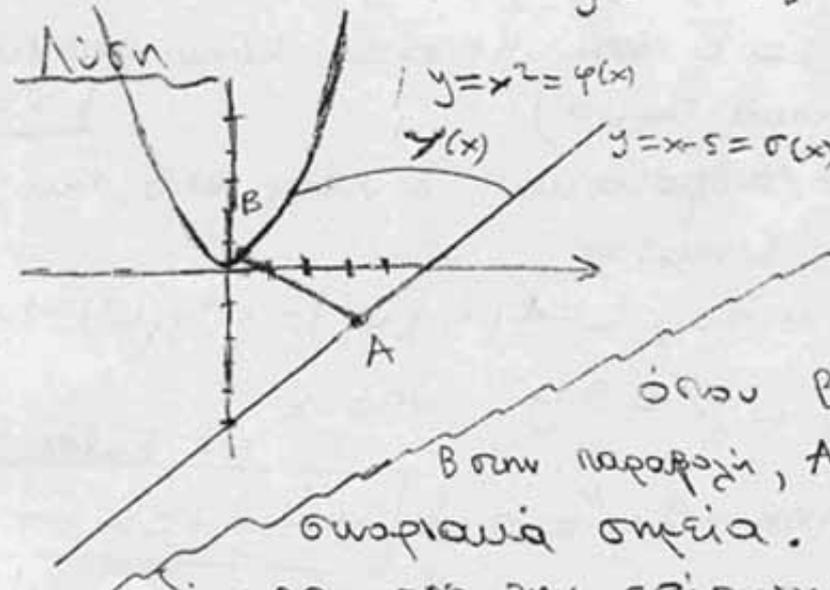
$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x$$

$$y'(\frac{\pi}{2}) = \underline{c_1 e^{\frac{\pi}{2}} - c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = 0}$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$
οπότε η ακρότατη τιμή είναι

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} \sin x}$$

7) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = x - 5$.



Η απόσταση δίνεται από την ελάχιστη τιμή του συναρτησοειδούς

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

όπου $B = (\beta, \beta^2)$, $A = (a, a - 5)$

B σημ. παραβολή, A σημ. ευθεία, ελεύθερα συναρτησώδη σημεία. Οι στασιμές συναρτήσεις y δίνονται από την εξίσωση Euler

$$L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} = 0 \quad \text{όπου } L = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$0 \quad - \quad \frac{y'' \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{y' y''}{\sqrt{1 + y'^2}}}{(1 + y'^2)} = 0$$

$$- [y''(1 + y'^2) - y'^2 y''] = 0 \quad \text{ή } y'' = 0 \quad \text{ή}$$

$$y' = c_1 \Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 x + c_2} \quad \text{(1) στασιμη συνάρτηση.}$$

Για να προσδιορίσουμε οι σταθερές (1) χρησιμοποιούμε επιπλέον συνθήκες για τα συναρτησώδη σημεία.

Συνοψίζοντας

Οι συνθήκες αυτές χωρίζονται σε συνθήκες ελευθέρου άκρου και είναι γενικότερες από τα συνθήκες που δίνουμε συν. 2ο των σημειώσεων που ισχύει μόνο όταν το συναρτησώδη σημείο ανήκει πάνω σε ευθεία της μορφής $x = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Οι συνθήκες αυτές (δείτε σημειώσεις σελ. 22) είναι:

$$\left[L + (\sigma' - y') L_{y'} \right]_{x=a} = 0 \quad (2) \quad \text{όπου } L \text{ η Lagrangian και}$$

το $(a, A) \in \text{σημ. ευθείας } y = \sigma(x) \text{ που δίνεται δηλ. } \sigma(a) = A$. Ανάλογη συνθήκη ισχύει και για το άκρο

(β, B) που ανήκει στην $y = \varphi(x)$ δηλ. $\varphi(\beta) = B$ και

$$L + (\varphi' - y') L_{y'} \Big|_{x=\beta} = 0 \quad (3)$$

Αν π.χ. η $y = \sigma(x)$ είναι ευθεία της μορφής
 $x = a$ τότε η (2) γίνεται $L_{y'}(a, y(a), y'(a)) = 0$
 (δες σημ. σελ. 21, επίσης προκύπτει και από την (2)).

Συνεπώς σ' αυτό το πρόβλημα που οι $\varphi(x), \sigma(x)$
 δεν είναι ευθείες της μορφής $x = \lambda$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες εφαρμόσιμότητας που είναι:

$$\sqrt{1+y'(x)^2} + (\sigma'(x) - y'(x)) \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \Big|_{x=a} = 0 \quad (4)$$

και

$$\sqrt{1+y'(x)^2} + (\varphi'(x) - y'(x)) \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \Big|_{x=\beta} = 0 \quad (5)$$

Οι (4), (5) για $\sigma(x) = x - 5$, $\varphi(x) = x^2$ και από την
 (1) όπου $y'(x) = c_1$ γράφονται:

$$\sqrt{1+c_1^2} + (1 - c_1) \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0 \quad (6)$$

$$\sqrt{1+c_1^2} + (2\beta - c_1) \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0 \quad (7)$$

Επίσης η (1) δίνει για τα σημεία $(a, A), (\beta, B)$ που ανήκουν
 και στις $y = \varphi(x), y = \sigma(x)$:

$$c_1 a + c_2 = a - 5 \quad (8)$$

$$c_1 \beta + c_2 = \beta^2 \quad (9)$$

Η λύση του συστήματος (6), (7), (8), (9) δίνει

$$c_1 = -1, c_2 = 3/4, a = 7/2, \beta = 23/8, \text{ οπότε } y = -x + 3/4$$

και η αντίστοιχη λύση είναι

$$J(y) = \int_{7/2}^{23/8} \sqrt{1 + \left[-x + 3/4\right]^2} dx = \frac{19\sqrt{2}}{8}$$