

Aσύνη: Δινεται η Συνοριακή Πρόβλημα: 1-

$$\varepsilon y'' - (2-t^2)y = -1, \quad y(-1) = y(1) = 0, \quad \underline{\text{πλέξει}}$$

Να βρεθεί τια αριθμητική λύσης τοπική προσέγγιση σημ.

Nίση: Δοκιμαστικά προσέγγιση δια συνοριακά στρέμματα στο  $t=-1, t=1$ .

② ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ  $y_{\varepsilon \zeta} = y_{\varepsilon \zeta}(t)$ :

$$\text{Αναγνωριστική λύση } y \sim y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$$

(ηή για τη συγχρόνη τη  $y_0$  είναι αρνητικό)

$\varepsilon^0$  &  $\varepsilon=0$   $-(2-t^2)y_0 = -1$ , (χωρίς συμβιβαστική παραγόντη ανά  $t=-1, t=1$ )

$$y_0(t) = \frac{1}{2-t^2} \quad (\text{απλεύτηκε εξίσωση})$$

③ ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΡΟΣ.  $y_{\varepsilon \zeta}$  στο  $t=1$

Συνοριακά στρέμματα στο  $t=1, t=0(\delta(\varepsilon))$

Κλιμακωσίσματα:  $\tau = \frac{1-t}{\delta(\varepsilon)}$  όπου  $\tau = O(1) \quad (t=1-\tau\delta)$

$$y(t) = \psi(\tau), \quad y' = -\dot{\psi} \frac{1}{\delta}, \quad y'' = \ddot{\psi} \frac{1}{\delta^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} t=1-2\tau\delta+\tau^2\delta^2 \\ \end{array} \right.$$

Σημείωση από γένος:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \ddot{\psi} - \dot{\psi} - \delta^2 \tau^2 \psi + 2\delta\tau \psi = -1$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \delta^2 \Rightarrow \delta \sim \varepsilon^{1/4}$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \delta \Rightarrow \delta \sim \varepsilon^{1/3}$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim 1 \Rightarrow \delta \sim \varepsilon^{1/2}$$

Όχις είναι αναδεικνυτικός παρανομός την τιμολόγηση δηλ.

$$\delta = \sqrt{\varepsilon}$$

Καραγιόγης συνεξισώσεις

$$\ddot{\psi} - 3\dot{\psi} - \varepsilon \tau^2 \psi + 2\sqrt{\varepsilon} \tau \dot{\psi} = -1$$

$$\underline{\varepsilon=0} \quad \ddot{\psi}_0 - \dot{\psi} = -1$$

$$\psi_0(0) = 0$$

$$\psi_0(\tau) = c_1 e^\tau + c_2 e^{-\tau} + 1,$$

$$\psi_0(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -(1+c_2)$$

$$\underline{\psi_0(\tau) = 1 + c_2 e^{-\tau} - (1+c_2) e^\tau}$$

$$\psi \sim \psi_0 + \varepsilon \psi,$$

$$t = 1 - \tau \delta$$

$$1 = 1 - \tau \delta$$

$$\tau = 0$$

⑩ ΣΥΝΑΡΜΟΛΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΞΩΤ.

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2-t^2} = \frac{1}{2 - (1 - 2\tau\sqrt{\varepsilon} + \tau^2\varepsilon)} \rightarrow 1$$

ότου  
 $\varepsilon \rightarrow 0$   
 $\tau = 0$  (II)

$$\psi_0(\tau) = \psi_0\left(\frac{1-\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = 1 + c_2 e^{-\frac{1-\tau}{\sqrt{\varepsilon}}} -$$

$$- (1+c_2) e^{\frac{1-\tau}{\sqrt{\varepsilon}}} \rightarrow \infty \text{ επειδή}$$

ότου  $1+c_2=0 \Rightarrow \underline{c_2=-1}$  θέτουμε γραφτέναι  
λιγότεροι

$$\underline{\psi_{\varepsilon\tau} \sim \psi_0(\tau) = 1 - e^{-\tau} = 1 - e^{\frac{t-1}{\sqrt{\varepsilon}}}}$$

④ ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΩΤ. ΠΡΟΣ.  $\hat{Y}_{\varepsilon_0}(t)$  σω  $t=-1$ . -3-

Αναγορεύεται ότι η διάλυση.

$$\tau = \frac{t - (-1)}{\delta(\varepsilon)} = \frac{t+1}{\delta(\varepsilon)} \text{ καθώς } \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

$$\hat{Y}_{\varepsilon_0}(t) = \hat{\psi}(\tau) \sim \hat{\psi}_0(\tau) \quad \left| \begin{array}{l} t = \tau\delta - 1 = \\ = \tau\sqrt{\varepsilon} - 1 \end{array} \right.$$

$$\hat{\psi}_0'' - \hat{\psi}_0 = -1$$

$$\hat{\psi}_0(0) = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} t = -1 \Rightarrow \tau = 0 \\ t^2 = \frac{2}{\varepsilon} + 1 - 2\sqrt{\varepsilon} \end{array} \right.$$

$$\hat{\psi}_0(\tau) = 1 + c_1 e^{-\tau} - (1+c_1) e^{\tau}$$

⑤ Συναρτήσει

$$Y_0(t) = \frac{1}{2-t^2} = \frac{1}{2 - 1 - \tau^2\varepsilon + 2\tau\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 1 \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\hat{\psi}_0(\tau) = \hat{\psi}_0\left(\frac{t+1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \frac{t+1}{1 + c_1 e^{\frac{t+1}{\sqrt{\varepsilon}}} - (1+c_1) e^{-\frac{t+1}{\sqrt{\varepsilon}}}} \Rightarrow c_1 = -1$$

$$\hat{\psi}_0(\tau) = 1 - e^{-\tau} = 1 - e^{-\frac{t+1}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

⑥ ⑦ Ομοιομορφή ΑΥΓΗΣ ΣΩ  $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_{\varepsilon_0}(t) + Y_{\varepsilon_0}(t) + \hat{Y}_{\varepsilon_0}(t) - Y_{\text{out}} - Y_{\text{out}} \\ &= \frac{1}{2-t^2} + 1 - e^{\frac{t+1}{\sqrt{\varepsilon}}} + 1 - e^{-\frac{t+1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1 - 1 = \\ &\quad - \frac{1}{2-t^2} - e^{\frac{t+1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{t+1}{\sqrt{\varepsilon}}} \end{aligned}$$