

Για να επιτύχουμε τη συμβολή της εσωτερικής με την έξωτερην προσέγγιση ευδίζουμε μία ενδιαιθερική μεταβλητή στο χώρο επικάλυψης των δύο προσέγγισεων της μορφής

$$n = \frac{x}{\sqrt{\epsilon}}$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε η ανιώνη συμβολή συμβολής διδεται από τη σχέση:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} y^0(\sqrt{\epsilon} n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} y^i(\sqrt{\epsilon} n).$$

Όπως

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} y^0(\sqrt{\epsilon} n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\beta - 1 + \sqrt{\epsilon} n + \dots) = \beta - 1$$

και

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} y^i(\sqrt{\epsilon} n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (a - c_1 + c_1 e^{-\frac{n}{\sqrt{\epsilon}}} + \dots) = a - c_1,$$

συνεπώς

$$a - c_1 = \beta - 1 \quad \text{η} \quad c_1 = a - \beta + 1,$$

οπότε

$$y^i(x) = \beta - 1 + (a - \beta + 1) e^{-x/\epsilon} + \dots.$$

Η ομοιόμορφη προσέγγιση  $y_u(x)$  που προκύπτει από την παραπάνω εσωτερικήν ή έξωτερην προσέγγιση έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} y_u(x) &= y^0(x) + y^i(x) - (\beta - 1) \\ &= \beta - 1 + x + (a - \beta + 1) e^{-x/\epsilon} + \dots \end{aligned}$$

Για την ακρίβη λίση την (1) λογινεί ου:

$y(x) = x + \beta^{-1} + (\alpha - \beta + 1)e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0$

ενορίων παιρνόντες οι

$y(x) - y_u(x) = O(\varepsilon)$  καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ , δηλαδή

εστι απλή προσέγγισης  $y(x) - y_u(x)$  είναι τάξεως

$\varepsilon$ . Επιπλέον συγκινούν :

$$y_u(0) = \alpha \quad \Rightarrow \quad y_u(1) = \beta + (\alpha - \beta + 1)e^{-1/\varepsilon} \rightarrow \beta, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

### Άσκηση 2

Έσω το πρόβλημα ευρισκεντικών τιμών

$$(11) \quad \begin{cases} \varepsilon y''(x) - y'(x) = 2x \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η (ακριβής) λύση του.

β) Να χρησιμοποιείται η μέθοδος της συναρμολόγησης αεριπτωτικών ανατομικάτων για να βρεθεί μήδε πρώτης τάξης ομοιόμορφη προσέγγιση της λύσης του (11). Κατόπιν να αποδειχθεί η προσέγγιση αυτή λύσης της τιμής (ακριβής) λύσης του (11).

Λύση

α) Η σκοπευτική έξιση

$$\varepsilon y_h''(x) - y_h'(x) = 0$$

εχει τεντόκατη λύση της μορφής

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{x/\varepsilon}$$

Επίσης μία μερική λύση της εξισώσεως του (11) είναι

$$y_p(x) = -x^2 - 2\epsilon x$$

και συνέπεια n γενική λύση του (11) έχει

τη μορφή:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{x/\epsilon} - x^2 - 2\epsilon x.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις συνθήκες συνδικάτου προκύπτει ότι οι συαρτήσεις  $c_1$  και  $c_2$  ικανοποιούν το σύστημα:

$$c_1 + c_2 = \alpha$$

$$c_1 + c_2 e^{1/\epsilon} = \beta + 1 + 2\epsilon$$

τα οποία n λύση είναι

$$c_1 = \frac{\alpha e^{1/\epsilon} - \beta - 1 - 2\epsilon}{e^{1/\epsilon} - 1}$$

$$c_2 = \frac{\beta + 1 + 2\epsilon - \alpha}{e^{1/\epsilon} - 1}$$

Συνέπεια n ακριβής λύση του (11) είναι n

$$y(x) = -x^2 - 2\epsilon x + \frac{\alpha e^{1/\epsilon} - \beta - 1 - 2\epsilon + (\beta + 1 + 2\epsilon - \alpha) e^{x/\epsilon}}{e^{1/\epsilon} - 1}. \quad (12)$$

Όμως καθώς  $\epsilon \rightarrow 0$  n ποσότητα  $e^{1/\epsilon}$  γίνεται εκθεικά μεγαλύτερη και έτσι n (12) μπορεί να εκφρασθεί ως

$$y(x) = -x^2 + \alpha + (\beta + 1 - \alpha) e^{-(1-x)/\epsilon} + O(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (13)$$

(B) Στην περιπτώση, αντί, εφόσον o συτελεστής του γ' είναι αριθμητικός, υπάρχει οριακό σύριγμα αλλά αντί τη φόρα σω δεύτερο άκρο  $x=1$ . Κατανέπεια n εξωτερική προσέγγιση ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$y(0) = \alpha \quad (14)$$

Ανατίθαιμε τώρα εσωτερική προσέγγιση της μορφής

$$y^0(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (15)$$

Ανακαλούμενα την εκφραση (15) στην εξίσωση του (11) και σημ αναριθμούμε συλληκη (14) και εξίσωσης και σα δύο μέλη τους συνελέγουμε του ε στην προκύπτουσα εκφραση παίρνουμε τη προβληματική

$$y_0'(x) = -2x \quad y_0(0) = \alpha$$

του οποίου λύση είναι

$$y_0(x) = \alpha - x^2$$

και σωνεις μια πρώτης τάξης εσωτερική προσέγγιση είναι  $n$

$$y^0(x) = \alpha - x^2 + \dots$$

Εφόσον  $y^0(1) = \alpha - 1 \neq \beta$ , εν γένει, η  $y^0(x)$  δεν μοιάζει κατα σω δεξιό άκρο και επομένως μια εσωτερική προσέγγιση πρέπει να προσδιοριστεί κατα σω  $x=1$ . Τα σωριακά σημεία κατα σω  $x=1$  εισαγαγούμε μια καλωδία μεταβλητή της μορφής

$$\xi = \frac{1-x}{\varepsilon^\lambda}, \quad \lambda > 0$$

ως προς την οποία τη εξίσωση του προβλήματος (11) γίνεται

$$\varepsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \varepsilon^{-\lambda} \frac{dy^i}{d\xi} = 2(1 - \varepsilon^\lambda \xi) \quad (14)$$

To ελαχίστο  $\lambda$  για το οποίο η  $\tilde{Y}_i$  ισχουν (14) είναι ομοιόμορφα διαγράφεται είναι το  $\lambda = 1$ . Ενδέκτικας η (14) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{d^2y^i}{d\xi^2} + \frac{dy^i}{d\xi} = 2\varepsilon(1-\xi) \quad (15).$$

Επιπλέον εφόσον το  $x=1$  αναστοιχεί στο  $\xi=0$ , έχουμε ότι

$$y^i(0) = \beta \quad (16).$$

Στη συνέχεια αναζητούμε μία εσωτερική προσέγγιση των (11) τις μορφές

$$y^i(\xi) = V_0(\xi) + \varepsilon V_1(\xi) + \dots \quad (17)$$

Ανακαθιστάμε την έκφραση (17) στις σχέσεις (15) και (16) και εξισώνουμε τους αντελεστές του  $\varepsilon$  και στα δύο μέλη της προκύπτουσας έκφρασης παίρνουμε τη πρόβλημα

$$V_0'' + V_0' = 0, \quad V_0(0) = \beta \quad (18),$$

του οποίου η λύση είναι  $n$ .

$$V_0(\xi) = \beta - c_1 + c_1 e^{-\xi}.$$

Σύντομα μία εσωτερική προσέγγιση πρώτης τάξης είναι  $n$

$$y^i(\xi) = \beta - c_1 + c_1 e^{-\xi} + \dots, \quad (19)$$

όπου  $c_1$  είναι μία σταθερά, η οποία θα προσδιοριστεί κατα τη συμφωνία της εσωτερικής με την εξωτερική προσέγγιση.

H εσωτερή προσέγγιση ως προς τη μεταβλητή  
x γράφεται

$$y^i(x) = \beta - c_1 + c_1 e^{-(1-x)/\varepsilon} + \dots$$

Ειδαίς γιατίς τώρα την ενδυνίκεση μεταβλητή

$$n = \frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}$$

η συνήματη συμχρόνης ταινία τη μορφή:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y^0(\sqrt{\varepsilon} n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y^i(\sqrt{\varepsilon} n)$$

Όμως

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y^0(\sqrt{\varepsilon} n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \alpha - (1 - n\sqrt{\varepsilon})^2 + \dots \right] = \alpha - 1$$

Κατ'

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y^i(\sqrt{\varepsilon} n) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\beta - c_1 + c_1 e^{-n/\sqrt{\varepsilon}} + \dots) \\ &= \beta - c_1, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$c_1 = \beta - \alpha + 1,$$

οπότε η εσωτερή προσέγγιση είναι

$$y^i(x) = (\alpha - 1) + (\beta - \alpha + 1) e^{-(1-x)/\varepsilon} + \dots$$

H ομοιόμορφη προσέγγιση που προκύπτει από τις γραφές  $y^0(x)$  και  $y^i(x)$  έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} y_u(x) &= y^0(x) + y^i(x) - (\alpha - 1) \\ &= \alpha - x^2 + (\beta - \alpha + 1) e^{-(1-x)/\varepsilon} + \dots \end{aligned}$$

Έτσι λογω και της σχέσης (13) έχεις στην

$$y(x) - y_u(x) = O(\varepsilon)$$

καθώς

$$\varepsilon \rightarrow 0^+$$

καὶ

$$y_u(1) = \beta , \quad y_u(0) = \alpha + (\beta - \alpha + 1) e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow \alpha , \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

$$= \alpha + O(\varepsilon) \rightarrow \alpha , \quad \varepsilon \rightarrow 0^+$$

Σηλαδή το σφάλμα  $y(x) - y_u(x)$  καθώς καὶ το σφάλμα  $y(0) - y_u(0)$  είναι τις  $\varepsilon$ .

---