

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΞΩΝ

A) Μέθοδος Lindstedt-Poincaré (Κανονική Διατάραξη)

Άσκηση 1

Διεταύ η διαφορική εξίσωση

$$(1) \quad u'' + \omega_0^2 u = \varepsilon (u')^2 u, \quad u=u(t), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

(α) Να κατασκευαστεί μία λιγού διατάραξης της μορφής

$$(2) \quad u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots$$

και σημείεται να εγενατεί κατά πόσον η
(2) αποτελεί μία οβοιδομορφη προσεγγίστικη λιγού
της (1).

(β) Να κατασκευαστεί μία οβοιδομορφη πρώτης τάξης
προσεγγίστικη λιγού της (1). Χρησιμοποιώντας τη
μέθοδο Lindstedt-Poincaré.

Πίνακας

(α) Θεωρούμε μία λιγού διατάραξης της μορφής
 $u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots$

Ανακαλούμενος τηρού την παραπάνω έκφραση
στην εξίσωση (1) και εγγυώντας στην προκύπτουσα έκφραση τους συνεχεστείσας την διαίρεση
μεταξύ της παρακείσθρου $0 < \varepsilon \ll 1$ παρατηρούμε:

$$\varepsilon^0: \quad u_0''(t) + \omega_0^2 u_0(t) = 0 \quad (3)$$

$$\varepsilon^1: \quad u_1''(t) + \omega_0^2 u_1(t) = (u_0'(t))^2 \cdot u_0(t) \quad (4)$$

Η λιγού της εξίσωσης (3), η οποία είναι μία οβοιδής εξίσωση, μπορεί να εκφραστεί κατά τη γνωστή

σεν μορφή:

$$u_0(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \beta)$$

για κάποιες σαθερές α, β . Τότε όμως η (4) γίνεται

$$\begin{aligned} u_1''(t) + \omega_0^2 u_1(t) &= \alpha^3 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \beta) \sin^2(\omega_0 t + \beta) \\ &= \frac{1}{4} \alpha^3 \omega_0^2 [\cos(\omega_0 t + \beta) - \cos(3\omega_0 t + 3\beta)] \end{aligned}$$

Μια μερική λύση, προκύπτει με τη μέθοδο προβοριστικών συνελεσσών, για την τελευταία εξίσωση είναι η:

$$u_1(t) = \frac{1}{8} \alpha^3 \omega_0 t \sin(\omega_0 t + \beta) + \frac{1}{32} \alpha^3 \cos(3\omega_0 t + 3\beta).$$

Συνεπώς μια λύση διαταραχής πρίν ταξις για την εξίσωση (1) είναι η:

$$(5) \quad u_{\text{προσ}}(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{1}{32} \varepsilon \alpha^3 [4\omega_0 t \sin(\omega_0 t + \beta) + \cos(3\omega_0 t + 3\beta)]$$

Τώρα για μικρούς χρόνους οπετ $\ll 1$, η υπότιμη προσεγγίζεται κανονικά την ακριβή λύση $u(t)$ της (1). Στην περίπτωση όμως που $t \geq O(\frac{1}{\varepsilon})$, ο διεύθυντος όπος της (5) γίνεται πολύ μεγάλος καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ για κάθε σαθερό t , ενοχέντως η υπότιμη είναι μια πολύ κακή προσέγγιση της ακριβούς λύσης $u(t)$ της (1). Για να βρούμε λύσην μια ομοιομορφή (που να τοχιέται για όλους τους χρόνους) προσεγγίζουμε λύση της (1) καταφεύγοντες στη μέθοδο Lindstedt-Poincaré.

(B) Σύμφωνα με τη μέθοδο Lindstedt-Poincaré, εισάγουμε μια κανονική χρονική μεταβλητή της μορφής:

$$\tau = \omega t = (\omega_0 + \omega_1 \varepsilon + \dots) t$$

οπότε η διαφορική εξίσωση (1) γίνεται:

$$(\omega_0^2 + 2\epsilon\omega_0\omega_1 + \dots) \ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon\omega_0^2 (\dot{u})^2 u + \dots \quad (6)$$

όπου $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ και $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$

Ενιαίας δέσμων

$$u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \dots$$

στην (6) και εξισώνοντας τους συντελεστές των δύναμεων του ϵ στην προκυπτουσαί παράσταση, πουρνούμε:

$$\epsilon^0: \quad \ddot{u}_0 + u_0 = 0 \quad (7)$$

$$\epsilon^1: \quad \ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{2\omega_1}{\omega_0} \ddot{u}_0 + (\dot{u}_0)^2 u_0. \quad (8)$$

Όντας και προβαριέντες παιρνούμε ότι η λύση της (7) γίνεται στη μορφή

$$u_0(t) = \alpha \cos(\tau + \beta)$$

όπου α, β είναι σταθερές. Συνεπώς η εξίσωση (8) γίνεται

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 &= \frac{2\omega_1}{\omega_0} \alpha \cos(\tau + \beta) + \alpha^3 \sin^2(\tau + \beta) \cos(\tau + \beta) \\ &= \left(\frac{2\omega_1}{\omega_0} \alpha + \frac{1}{4} \alpha^3 \right) \cos(\tau + \beta) - \frac{1}{4} \alpha^3 \cos(3\tau + 3\beta). \end{aligned}$$

Θέλοντας να μην εκφαντείται ένας "διωνιός" όπου στην προσεγγίστική μας λύση επιλέγεται

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0 \alpha^2}{8}$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$u_1(t) = \frac{1}{32} \alpha^3 \cos(3t + 3\beta) \quad \text{και} \quad \text{απα}$$

$$u(t) = \alpha \cos\left[\omega_0\left(1 - \frac{\epsilon \alpha^2}{8}\right)t + \beta\right] + \dots$$

Άσκηση 2

Διέρταε η διαφορική εξίσωση

$$(9) \quad (1 + \varepsilon u^2) \ddot{u} + 4u = 0, \quad u = u(t), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

(α) Να κατασκευαστεί μία λύση διαταραχών της μορφής:

$$(10) \quad u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots$$

και στη συνέχεια να εξεταστεί κατά πόσον η
(10) αποτελεί μία ομοιόμορφη προσεγγίστική λύση
της (9).

(β) Να κατασκευαστεί μία ομοιόμορφη πρώτης τάξης
προσεγγίστική λύση της (1), χρησιμοποιώντας τη
μέθοδο Lindstedt-Poincaré.

Λύση

(α) Θεωρούμε μία λύση διαταραχών της μορφής
 $u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots$

Ανακαθίστανται την παραπάνω έκφραση στην
εξίσωση (9) παιρνώμε

$$\left[1 + \varepsilon (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^2 \right] (u_0'' + \varepsilon u_1'' + \dots) + 4(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = 0$$

η λοοδίναρα

$$u_0'' + 4u_0 + \varepsilon (u_1'' + 4u_1 + u_0^2 u_0''' + \dots) + \dots = 0.$$

Εγγίζοντας τώρα τους συνεπειώτες των διναιμένων
του ε στην παραπάνω έκφραση παιρνούμε

$$\varepsilon^0: \quad u_0'' + 4u_0 = 0 \quad (11)$$

$$\varepsilon^1: \quad u_1'' + 4u_1 = -u_0^2 u_0''' \quad (12).$$

H Έσσεται της (11) εξει τη μορφή
 $u_0(t) = \alpha \cos(2t + \beta)$

όπου α, β είναι σταθερές. Συνέπειας στη (12) γίνεται

$$u_1'' + 4u_1 = 4\alpha^3 \cos^3(2t + \beta) = 3\alpha^3 \cos(2t + \beta) + \alpha^3 \cos(6t + 3\beta)$$

η αριθμητική εξει ως εύκριτη λύση την

$$u_1(t) = \frac{3}{4} \alpha^3 t \sin(2t + \beta) - \frac{1}{32} \alpha^3 \cos(6t + 3\beta) + \dots$$

και συνέπειας μία προσεγγίσιμη λύση πρώτης τάξης
 της (9) είναι η:

$$(13) \quad u_{\text{προσ}}(t) = \alpha \cos(2t + \beta) + \varepsilon \left[\frac{3}{4} \alpha^3 t \sin(2t + \beta) - \frac{1}{32} \alpha^3 \cos(6t + 3\beta) \right] + \dots$$

Για μικρούς χρόνους t , τέως ως $0 < \varepsilon t \ll 1$,
 η προσ προσεγγίζει ικανοποιητικοί την ακριβή λύση
 $u(t)$ της (9). Στην περίπτωση όμως που
 $t \geq O(\frac{1}{\varepsilon})$, ο δεύτερος όρος του προσών μέλους
 της (13) γίνεται πολύ μεγαλύς καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$,
 και επομένως η προσ γίνεται μία πολύ τακτή
 προσεγγίσιμη της ακριβούς λύσης $u(t)$. Για να
 προσδιορίσουμε μία ομοιόμορφη προσεγγίσιμη λύ-
 ση της (9), καταφέγγουμε στη μέθοδο
 Lindstedt - Poincaré.

(B) Σημειώνος με τη μέθοδο Lindstedt - Poincaré,
 ευστρατεύμε μία κανονική μεταβλητή τ το χρό-
 νο της μορφής

$$\tau = \omega t = (2 + \varepsilon \omega_1 + \dots) t \quad (14)$$

οπότε η διαφορική εξίσωση (9) γίνεται:

Αναλυτικές τείχες μίας λύσης των μορφών

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \dots \quad (15)$$

και λαμβανόντας υπόψην τη σχέση (14) προκύπτει
ότι οι όποιες $u_0(\tau)$ & $u_1(\tau)$ σύμβανται στο (15) θα είναι
πολιωνύμια των διαφορικών εξισώσεων

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{u}_0 + u_0 = 0 \quad (16)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{u}_1 + u_1 = -\omega_1 \dot{u}_1 - u_0^2 \ddot{u}_0 \quad (17).$$

Η λύση του (16) έχει τη μορφή

$$u_0(\tau) = \alpha \cos(\tau + \beta)$$

όπου α, β είναι σταθερές. Έτσι στο (17) παρέχεται
τη μορφή:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 &= \alpha \omega_1 \cos(\tau + \beta) + \alpha^3 \cos^3(\tau + \beta) \\ &= \left(\alpha \omega_1 + \frac{3}{4} \alpha^3 \right) \cos(\tau + \beta) + \frac{1}{4} \alpha^3 \cos(3\tau + 3\beta) \end{aligned}$$

Με σκοπό να αναλειψούμε τον "διωνιό" όποιο
 $(\alpha \omega_1 + \frac{3}{4} \alpha^3) \cos(\tau + \beta)$, εναλειψούμε

$$\omega_1 = -\frac{3}{4} \alpha^2$$

όποτε

$$u_1(\tau) = -\frac{4}{32} \alpha^3 \cos(3\tau + 3\beta) \quad \text{και ορίζεται}$$

$$u_{\text{τηλεος}}(\tau) = \alpha \cos(\tau + \beta) - \frac{\varepsilon}{32} \alpha^3 \cos(3\tau + 3\beta)$$

$$u_{\text{τηλεος}}(t) = \alpha \cos \left[2 \left(1 - \frac{3\varepsilon\alpha^2}{8} \right) t + \beta \right] + \dots$$

B) Θεωρία Οριακού Διπλώματος (Ιδιόμορφη Διατάραξη)

Άσκηση 1

Έσω στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(1) \begin{cases} \varepsilon y''(x) + y'(x) = 1, & 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta. \end{cases}$$

- α) Να βρεθεί η (ακριβής) λύση του.
- β) Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της σωματιδικής ασυμπτωτικής αναπτυξιακών για να βρεθεί μία πρώτης τάξης ομοιόμορφη προσεγγίση της λύσης του (1). Κατόπιν να συγκριθεί η προσεγγίση με την (ακριβή) λύση του (1).

Λύση

α) Η συνάρτηση $\tilde{y}_h(x)$

$$\varepsilon y_h''(x) + y_h'(x) = 0$$

έχει γενική λύση της μορφής

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-\lambda_1 x/\varepsilon}$$

εφόσον η χαρακτηριστική της $\tilde{y}_h(x)$ είναι $\varepsilon \lambda^2 + \lambda = 0$
 έχει λύσεις $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon}$. Ενίσης μία
 μερική λύση της $\tilde{y}_h(x)$ του προβλήματος
 (1), μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι είναι η
 $y_p(x) = x$. Συνεπώς η γενική λύση του προ-
 βλήματος (1) έχει τη μορφή:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x/\varepsilon} + x.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες προ-
 πτει ου να σταθερέσσιας c_1 και c_2 πρέπει να

ικανοποιούν το σύστημα:

$$c_1 + c_2 = \alpha$$

$$c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \beta - 1$$

το οποίο έχει λύσεις

$$c_1 = \frac{\beta - 1 - \alpha e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}, \quad c_2 = \frac{\alpha - \beta + 1}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

Συνεπώς η (αριθμήσ) λύση του (1) είναι η

$$y(x) = x + \frac{\beta - 1 - \alpha e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + (\alpha - \beta + 1) e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

(β) Καθώς $\varepsilon \rightarrow 0^+$, η εξίσωση του προβλήματος (1) μετατρέπεται σε μία πρώτη τάξη διαφορικής εξίσωσης η οποία, εν γένει, δεν μπορεί να λύσεται καν τις δύο συνοριακές συνθήκες. Εφόσον ο αντελεστής του όρου y' είναι θετικός, Για να πάργησε ένα συνοριακό σύριγμα στο αριστερό άκρο $x=0$ του διαστήματος ορισμού της λύσης και συνεπώς η εσωτερική προσέγγιση $y^0(x)$ της λύσης Για λύση να λειτουργεί τη συνοριακή συνθήκη $y(1)=\beta$. Ανατρέψτε την εσωτερική προσέγγιση της λύσης σε μορφή

$$y^0(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots . \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την έκφραση (2) στην εξίσωση του προβλήματος (1) και εξισώνοντας τους συαριθμούς όρων του προκίνητων νόμων-νομιμών βανδικεών της ε παρίστανται ότι

$$y_0'(x) = 1. \quad (3)$$

Επίσης λαμβάνοντας υπόψην και τη συνοριακή συνθήκη $y(1)=\beta$ παίρνουμε ότι

$$y(1) = \beta. \quad (4)$$

Η λίση του προβλήματος (3)-(4) είναι

$$y(x) = \beta - 1 + x$$

και συνέπεια η εσωτερική προσέγγιση πρώτης
τάξης για το πρόβλημα (1) είναι η

$$y^0(x) = \beta - 1 + x + \dots \quad (5).$$

Για να προσδιορίσουμε τύρα την εσωτερική προσέγγιση της λίσης του (1) εισάγουμε μία κανονικότητα, μεταβλητή στο συνοριακό σχρόφτα της μορφής:

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^\lambda}, \quad \text{όπου} \quad \lambda > 0.$$

Ως προς την κανονικότητα, μεταβλητή το πρόβλημα (1) παίρνει τη μορφή:

$$\varepsilon^{1-2\lambda} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \varepsilon^{-1} \frac{dy^i}{d\xi} = 1 \quad (6)$$

όπου με $y^i(\xi) = y^i(x \varepsilon^\lambda)$ συμβολίζουμε την εσωτερική προσέγγιση της λίσης, στο συνοριακό σχρόφτα.

Ο εκθέτης λ προσδιορίζεται ως ο φλάκισσος δευτέρου αριθμούς έτσι ώστε η εξίσωση (6) να είναι ομοιόμορφα διαχαραγμένη, δηλαδή ο αντελεστής της μετασχέψης παραγάγου να είναι ανεξάρτητος του ε . Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι για την εξίσωση (6) είναι $\lambda = 1$. Πραγματικά όντως $\lambda = 1$ τότε η (6) παίρνει τη μορφή:

$$\varepsilon^{-1} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \varepsilon^{-1} \frac{dy^i}{d\xi} = 1,$$

η οποία εφόσον $\varepsilon^{-1} \neq 0$ γράφεται ως

$$\frac{d^2y^i}{d\xi^2} + \frac{dy^i}{d\xi} = \varepsilon. \quad (7)$$

Επιπλέον, εφόσον η εωτερική προσέγγιση λογικεί σε ανοριακό σημείο καταρτίζεται σε $x=0$, δια πρέπει να ικανοποιεί τη ανοριακή συνθήκη $y(0)=\alpha$. Το $x=0$ όμως αναστρέψεται σε $\xi=0$, συνεπώς γρέψεται να λογικεί $y^i(0)=\alpha$. (8)

Ανατίττουμε τηρούμενη την εωτερική προσέγγιση σε μορφή

$$y^i(\xi) = Y_0(\xi) + \varepsilon Y_1(\xi) + \dots \quad (9)$$

Ανατίττουμε την έκφραση (9) σε σχέση (7) και (8) και εξισώνουμε τα γνωστές του ε^0 για σα διαβάζουμε την προκύπτουσας έκφρασης παιρνώντας το πρόβλημα,

$$Y_0'' + Y_0' = 0, \quad Y_0(0) = \alpha \quad (10)$$

του οποίου η λύση είναι η

$$Y_0(\xi) = \alpha - c_1 + c_1 e^{-\xi},$$

όπου c_1 είναι μία σταθερά, η οποία αποφένεται στη λύση εφόσον σε πρόβλημα (10) έχουμε μόνο μία ανοριακή συνθήκη. Η σταθερά c_1 θα υπολογίσεται κατα τη διαδικασία συναρμόνισης της εωτερικής με την εξωτερική προσέγγιση. Συνέπειας η εωτερική προσέγγιση πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$y^i(\xi) = \alpha - c_1 + c_1 e^{-\xi} + \dots \quad \text{η λογική}$$

$$y^i(x) = \alpha - c_1 + c_1 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \dots$$