



**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ
ΕΡΓΑΣΙΑ 2^Η**

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2008-2009

Ασκήσεις από το βιβλίο «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά» του J. D. Logan

1^ο Πρόβλημα Ασκ. 3.10 σελ. 35

2^ο Πρόβλημα Ασκ. 3.6 σελ. 77

3^ο Πρόβλημα Ασκ. 1.5 (γ) σελ. 56

4^ο Πρόβλημα Ασκ. 5.10 σελ. 175

5^ο Πρόβλημα Ασκ. 6.3 σελ. 183

Σημείωση: Αρχικά δείξτε ότι: α) η ζητούμενη κλειστή καμπύλη είναι κυρτή, β) κάθε ευθεία γραμμή που χωρίζει τη ζητούμενη κλειστή καμπύλη σε δύο ίσα μήκη χωρίζει και το εμβαδόν σε δύο ίσα μέρη.

6^ο Πρόβλημα Ασκ. 1.4 σελ. 341 } εγχώρια

7^ο Πρόβλημα Ασκ. 1.7 σελ. 341



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ
ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2003-2004

1^ο Πρόβλημα (Πληθυσμιακό Πρότυπο, Λογιστική Εξίσωση)

Ο πληθυσμός $q = q(t)$ της πόλης της Νέας Υόρκης, αν δεν συμπεριλάβουμε την υψηλή μετανάστευση καθώς και τις ανθρωποκτονίες, ικανοποιεί τη λογιστική

$$\text{εξίσωση} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{25}q - \frac{1}{25 \cdot 10^6}q^2, \quad q(t_0) = q_0 \quad (1), \quad \text{όπου } t \text{ χρόνια.}$$

α) Τροποποιείστε την εξίσωση ώστε να συμπεριλάβετε το γεγονός ότι 9000 άνθρωποι ανά χρόνο εγκαταλείπουν την πόλη και 1000 άνθρωποι ανά χρόνο δολοφονούνται (τα δεδομένα αφορούν την περίοδο πριν το 2000). -10.000t

β) Θεωρώντας ότι ο πληθυσμός της Νέας Υόρκης ήταν περίπου 8.000.000 το 1970 να βρείτε τον πληθυσμό $q = q(t)$ για κάθε $t > 1970$. Τι συμβαίνει όταν $t \gg 1$;

γ) Συγκρίνετε τα αποτελέσματα της εξίσωσης που προκύπτει στην ερώτηση α) με αυτά της λογιστικής εξίσωσης (1) για $t \gg 1$.

δ) Να εξετάσετε επίσης την εξίσωση διαστατικά (να δώσετε τις μονάδες των σταθερών).

ε) Στη λογιστική εξίσωση $\frac{dq}{dt} = aq - bq^2$, $q(t_0) = q_0$ πόσες απογραφές πρέπει να κάνετε ώστε να προσδιορίσετε τα a, b, q_0 ; Μπορείτε να μειώσετε τον αριθμό των απογραφών (μείωση κόστους);

2^ο Πρόβλημα (Πληθυσμιακό Πρότυπο, Λογιστική Εξίσωση)

Μελετάμε τον πληθυσμό των φαλαινών σε κάποια θαλάσσια περιοχή. Γνωρίζουμε ότι αυτή η θαλάσσια περιοχή δεν μπορεί να θρέψει περισσότερες από K το πλήθος φάλαινες, ενώ αν ο αριθμός των φαλαινών είναι κατώτερος του R, τότε οι φάλαινες οδηγούνται σε εξαφάνιση.

α) Σχολιάστε το μαθηματικό πρότυπο: $\frac{dq}{dt} = m(K-q)(q-R)$, $q(0) = q_0$ (1),

όπου $q = q(t)$ ο πληθυσμός των φαλαινών και $t, m > 0$.

β) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα με άξονες q', q και άξονες q, t αν (i) $q_0 < R$,

(ii) $R < q_0 < K$, (iii) $q_0 < K$, (iv) $q_0 = K$ και (v) $q_0 = R$.

- γ) Να λυθεί το πρόβλημα (1) .
- δ) Προτείνετε τρόπο προσδιορισμού των m, K, R όταν ένα τουλάχιστον απ' αυτά είναι άγνωστο.
- ε) Αν το μαθηματικό πρότυπο (1) προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό των φαλαινών, περιγράψτε μία πολιτική αλιείας των φαλαινών.

3^ο Πρόβλημα (Πρόβλημα Ανταγωνιστικών Ειδών)

Θεωρούμε δύο είδη ενός οικοσυστήματος τα οποία ανταγωνίζονται για την ίδια, περιορισμένη σε ποσότητα, τροφή. Έστω $q = q(t)$ και $p = p(t)$ ο αριθμός των δύο ειδών, όπου q, p ικανοποιούν την ίδια λογιστική εξίσωση (χωρίς να συμπεριλάβουμε τον ανταγωνισμό των ειδών). Να κατασκευασθεί ένα μαθηματικό πρότυπο που να συμπεριλαμβάνει τον ανταγωνισμό των ειδών (ο ανταγωνισμός μειώνει τον αριθμό των ειδών και είναι ανάλογος του γινομένου των q, p με σταθερές αναλογίας $m > 0$ και $n > 0$). Να μελετηθεί (ποιοτικά) το πρόβλημα όταν $m > n$ (τι σημαίνει $m > n$ σε σχέση με τα είδη, να σκιαγραφηθεί (σχεδιαστεί) το επίπεδο φάσεως).

4^ο Πρόβλημα (Πρόβλημα Θηρευτή-Θηράματος)

Ένα σύστημα θηρευτή-θηράματος ενός είδους φάλαινας Φ και ενός ανταρκτικού μικρού ψαριού Ψ έχει τα εξής χαρακτηριστικά. (α) Δεν υπάρχει περιορισμός στην αύξηση τους ούτε άλλοι ανταγωνιστές. (β) Δεν υπάρχουν άλλοι ανταγωνιστές. (γ) Οι φάλαινες Φ μειώνονται (εξαφανίζονται) με ρυθμό ανάλογο του πληθυσμού τους και αυξάνονται ανάλογα με τον αριθμό των συναντήσεων ($\Phi \cdot \Psi$). (δ) Επιπλέον τα Ψ αυξάνονται ανάλογα του πληθυσμού τους και μειώνονται ανάλογα με τον αριθμό των συναντήσεων ($\Phi \cdot \Psi$). Βρείτε το σύστημα που περιγράφει τους ρυθμούς μεταβολής $\Phi = x = x(t)$, $\Psi = y = y(t)$ και στη συνέχεια την $y = y(x)$. Κάνετε ποιοτική μελέτη (περιοδικό φαινόμενο, κλπ).

5^ο Πρόβλημα (Πρότυπο Στρατιωτικής Μάχης)

Έστω ότι το X παριστάνει μία ομάδα ανταρτών και Y μία ομάδα του συμβατικού στρατού. Η μάχη μεταξύ των δυνάμεων X και Y μπορεί να περιγραφεί από ένα μαθηματικό πρότυπο τύπου-Lanchester, δηλαδή από ένα αυτόνομο σύστημα της μορφής:

$$\frac{dx}{dt} = -a x y, \quad \frac{dy}{dt} = -b x,$$

όπου $x = x(t)$, $y = y(t)$ παριστάνουν τις δυνάμεις των ανταρτών και του συμβατικού στρατού τη χρονική στιγμή t αντίστοιχα.

- α) Ποιες υποθέσεις πρέπει να γίνουν και ποιες σχέσεις πρέπει να ληφθούν υπόψη έτσι ώστε να δικαιολογηθεί το παραπάνω πρότυπο; Είναι το παραπάνω πρότυπο λογικό;
- β) Αποδείξτε ότι τα $x = x(t)$, $y = y(t)$ συνδέονται μεταξύ τους με τον «παραβολικό νόμο» $a y^2 = 2 b x + M$, όπου $M = a y_0^2 - 2 b x_0$, $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$.
- γ) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι αρχικές συγκεντρώσεις δυνάμεων x_0 και y_0 έτσι ώστε στο τέλος να επικρατήσει ο συμβατικός στρατός Y ; Αν τελικώς δεν επικρατήσει ο συμβατικός στρατός Y πόσοι επιζώντες θα υπάρξουν;