



Για μετά το Τάχα

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1<sup>η</sup>

- (N) 1. Βιβλίο "Mathematica", Σ. Τραχανά: Ασυ. 4, σελ. 193.
- (W) (E) 2. - " W. Boyce & R. DiPrima: "Σ. Δ.Ε. ΥΠ.Σ.Τ." Ασυ. 18, σελ. 80.
- (A) ? 3. - " J. D. Logan "Εφαρμ. Μαθ/ων": Ασυ. 3.6, σελ. 34.  
(Υπόδειξη: "Το πρόβλημα των χαρακτηριστικών Points" σελ. 24-29)
- (K) (E) 4) ~~Χαρακτηριστικά Προβλήματα~~ Ασυ. 3.3. σελ. 32.

Από το βιβλίο  
"ELEMENTARY DIFFERENTIAL EQUATIONS"  
with boundary value problems  
ΕΚΔΟΣΕΙΣ: PEARSON Τιμή ΚΟΥΤΛΕΡ & JOHNSON  
PROJECTS

(K) (S)

### Project 1: Flushing Out a Radioactive Spill

A lake holding 5,000,000 gallons of water is fed by a stream. Assume that fresh water flows into the lake at a rate of 1000 gal/min and that water flows out at the same rate. At a certain instant, an accidental spill introduces 5 lb of soluble radioactive pollutant into the lake. Assume that the radioactive substance has a half-life of 2 days and dissolves in the lake water to form a well-stirred mixture.

- Let  $Q(t)$  denote the amount of radioactive material present within the lake at time  $t$ , measured in minutes from the instant of the spill. Use the conservation principle [rate of change of  $Q(t)$  equals rate in minus rate out] to derive a differential equation describing how  $Q(t)$  changes with time. Note that the solute is removed by both outflow and radioactive decay. Add the appropriate initial condition to obtain the initial value problem of interest.
- Solve the initial value problem formulated in part 1.
- How long will it take for the concentration of the radioactive pollutant to be reduced to 0.01% of its original value?

-1-

Διεύθυνση "Χειραγραστή" των project 1 και 2 στην  
ΙΠΠΙΔΗΣ Ζ. Η.

(N)

## (6) Project 2: Processing Seafood

Many foods, such as crabmeat, are sterilized by cooking. Harvested crabs are laden with bacteria, and the crabmeat must be steamed to reduce the bacteria population to an acceptable level. The longer the crabmeat is steamed, the lower the final bacteria count. But steaming forces moisture out of the meat, reducing the amount of crabmeat for sale. Excessive cooking also destroys taste and texture. The processor is therefore faced with a tradeoff when choosing an appropriate steaming time.

The basis for a choice of steaming time is the concept of "shelf life." After the steaming treatment is completed, the product is placed in a sterile package and refrigerated. Under refrigeration, the bacterial content in the meat slowly increases and eventually reaches a size where the crabmeat is no longer suitable for consumption. The time span during which packaged crabmeat is suitable for sale is called the *shelf life* of the product. We study the following problem: How long must the crabmeat be steamed to achieve a desired shelf life?

The first step in modeling shelf life is to choose a model that describes the population dynamics of the bacteria. For simplicity, assume

$$\frac{dP}{dt} = k(T)P, \quad (1)$$

where  $P(t)$  denotes the bacteria population at time  $t$ . In equation (1),  $k(T)$  represents the difference between birth and death rates per unit population per unit time. In this model,  $k$  is not constant; it is a function of  $T$ , where  $T$  denotes the temperature of the crabmeat. [Note that  $k(T)$  is ultimately a function of time, since the temperature  $T$  of the crabmeat varies with time in the steamer and in the refrigeration case.]

We need to choose a reasonable model for the bacteria growth rate,  $k(T)$ . We do so by reasoning as follows. At low temperatures (near freezing), the rate of growth of the bacteria population is slow; that's why we refrigerate foods. Mathematically,  $k(T)$  is a relatively small positive quantity at those temperatures. As temperature increases, the bacterial growth rate,  $k(T)$ , first increases, with the most rapid rate of growth occurring near 90°F. Beyond this temperature, the growth rate begins to decrease. Beyond about 145°F, the death rate exceeds the birth rate and the bacteria population begins to decline. A simple model that captures this qualitative behavior is the quadratic function

$$k(T) = k_0 + k_1(T - 34)(140 - T), \quad (2)$$

where  $k_0$  and  $k_1$  are positive constants that are typically determined experimentally.

We also need a model that describes the thermal behavior of the crabmeat—how the crabmeat temperature  $T$  varies in response to the temperature of the surroundings. Assuming Newton's law of cooling, we have

$$\frac{dT}{dt} = \eta[S(t) - T]. \quad (3)$$

In equation (3),  $\eta$  is a positive constant and  $S(t)$  is the temperature of the surroundings. Note that the surrounding temperature is not constant, since the crabmeat is initially in the steamer and then in the refrigeration case.

We now apply this model to a specific set of circumstances. Assume the following:

- (i) Initially the crabmeat is at room temperature (75°F) and contains about  $10^7$  bacteria per cubic centimeter.
- (ii) The steam bath is maintained at a constant 250°F temperature.
- (iii) When the crabmeat is placed in the steam bath, it is observed that its temperature rises from 75°F to 200°F in 5 min.
- (iv) When the crabmeat is kept at a constant 34°F temperature, the bacterial count in the crabmeat doubles in 60 hr.

$$(2) r+k = -\frac{\ln 0.5}{2000} \Rightarrow k$$

## Πρόγραμμα 2

### Τα θαλασσινά επεξεργασίας.

$$k = -\frac{(\ln 0.5) \cdot v}{2000} - r = \frac{1003,38 - 100}{2000} \Rightarrow Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0.00024t}$$

Πολλά τρόφιμα, όπως το κρέας του καβουριού, αποστειρώνονται με το μαγείρεμα. Τα συγκομισμένα καβούρια φορτώνονται με τα βακτήρια, και το κρέας του καβουριού πρέπει να βράσει στον ατμό για να μειωθεί ο πληθυσμός βακτηρίων σε ένα αποδεκτό επίπεδο. Όσο περισσότερο το κρέας καβουριού βράζει στον ατμό, τόσο χαμηλότερη η τελική αρίθμηση βακτηριδίων. Άλλα βράζοντας το, μειώνεται η υγρασία του κρέατος και η ποσότητα του κρέατος προς πώληση. Το υπερβολικό μαγείρεμα καταστρέφει επίσης την γεύση και τη σύσταση. Κατά την επεξεργασία επομένως βρισκόμαστε αντιμέτωποι με ένα δίλημμα κατά την επιλογή ενός κατάλληλου χρόνου βρασίματος στον ατμό.

Η βάση για μια επιλογή του χρόνου βρασίματος στον ατμό είναι η έννοια "της ζωής του προϊόντος στο ράφι." Αφότου ολοκληρώνεται η επεξεργασία βρασίματος στον ατμό, το προϊόν τοποθετείται σε μια αποστειρωμένη συσκευασία και καταψύχεται. Κατά την ψύξη, το βακτηριακό περιεχόμενο στο κρέας αυξάνει αργά και φθάνει τελικά σε ένα μέγεθος όπου το κρέας δεν είναι πλέον κατάλληλο για την κατανάλωση. Η χρονική έκταση κατά τη διάρκεια της οποίας συσκευασμένο το κρέας είναι κατάλληλο για την πώληση καλείται η ζωή του προϊόντος στο ράφι. Μελετάμε το ακόλουθο πρόβλημα: Πόσο καιρό το πολύ πρέπει το κρέας να βράσει στον ατμό για να επιτύχει μια επιθυμητή ζωή του προϊόντος στο ράφι; Το πρώτο βήμα στη διαμόρφωση της ζωής του προϊόντος στο ράφι είναι να επιλεχτεί ένα πρότυπο που περιγράφει τη δυναμική πληθυσμών των βακτηρίων. Απλά, υποθέστε

$$dP/dt = K(T)P \quad (1) \quad t: \text{χρόνος}, \quad T: \text{θερμ/στα του κρέατος}$$

όπου το  $P(t)$  δείχνει τον πληθυσμό βακτηριδίων στο χρόνο  $t$ . Στην εξίσωση (1), το  $K$  αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ της γέννησης και των ποσοστών θανάτου ανά πληθυσμό (μονάδων) ανά χρόνο (μονάδων). Σε αυτό το πρότυπο,  $K$ : είναι μη σταθερά, είναι μια συνάρτηση του  $T$ , όπου το  $T$  δείχνει τη θερμοκρασία του κρέατος. [Σημειώστε ότι το  $K(T)$  είναι τελικά μια συνάρτηση του χρόνου, δεδομένου ότι η θερμοκρασία  $T$  του κρέατος ποικίλλει ανάλογα με το χρόνο στον ατμό και στην περίπτωση ψύξης]. Πρέπει να επιλέξουμε ένα λογικό πρότυπο για το ποσοστό αύξησης βακτηριδίων,  $K(T)$ . Έτσι σκεφτόμαστε ως εξής. Στις χαμηλές θερμοκρασίες (κοντά στο πάγωμα), ο ρυθμός ανάπτυξης του πληθυσμού βακτηριδίων είναι αργός, γι' αυτό καταψύχουμε τα τρόφιμα. Από μαθηματική άποψη, το  $K(T)$  είναι μικρή θετική ποσότητα σε αυτές τις θερμοκρασίες. Δεδομένου ότι η θερμοκρασία αυξάνεται, το βακτηριακό ποσοστό αύξησης,  $K(T)$ , αρχικά αυξάνεται, με το γρηγορότερο ρυθμό ανάπτυξης που εμφανίζεται κοντά σε  $90^{\circ}\text{F}$ . Πέρα από αυτήν την θερμοκρασία, το ποσοστό αύξησης αρχίζει να μειώνεται. Πέρα από περίπου  $145^{\circ}\text{F}$ , το ποσοστό θανάτου υπερβαίνει το ποσοστό γέννησης και ο πληθυσμός βακτηριδίων αρχίζει να μειώνεται. Ένα απλό πρότυπο που σύλλαμβάνει αυτήν την ποιοτική συμπεριφορά είναι η τετραγωνική συνάρτηση

$$K(T) = K_0 + K_1(T - 34)(140 - T), \quad (2)$$

όπου  $K_0$  και  $K_1$  είναι θετικές σταθερές που καθορίζονται πειραματικά. Χρειαζόμαστε επίσης ένα πρότυπο που περιγράφει τη θερμική συμπεριφορά του κρέατος, πώς η θερμοκρασία του κρέατος καβουριού  $T$  ποικίλλει σε ανταπόκριση με τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Να υποθέσουμε το νόμο της ψύξης του Newton, έχουμε

$$\frac{dT}{dt} = \eta [S(t) - T] \quad (3)$$

Στην εξίσωση (3), "η" είναι μια θετική σταθερά και το  $S(t)$  είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Σημειώστε ότι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος δεν είναι σταθερή, δεδομένου ότι το κρέας είναι αρχικά στον ατμό και έπειτα στην περίπτωση ψύξης. Εμείς τώρα εφαρμόζουμε αυτό το πρότυπο σε ένα συγκεκριμένο σύνολο περιστάσεων.

Υποθέστε τα εξής:

- (i) Αρχικά το κρέας είναι στη θερμοκρασία δωματίου ( $75^{\circ}\text{F}$ ) και περιέχει  $10^7$  βακτηρίδια ανά κυβικό εκατοστόμετρο.
- (ii) Το λουτρό ατμού διατηρείται σε μια σταθερή θερμοκρασία  $250^{\circ}\text{F}$ .
- (iii) Όταν το κρέας τοποθετείται στο λουτρό ατμού, παρατηρείται ότι η θερμοκρασία του αυξάνεται από  $75^{\circ}\text{F}$  σε  $200^{\circ}\text{F}$  σε 5 λεπτά.
- (iv) Όταν το κρέας διατειρείται σε μια σταθερή θερμοκρασία  $34^{\circ}\text{F}$ , ο πληθυσμός των βακτηρίων του διπλασιάζεται σε 60 ώρες.
- (v) Ο αριθμός των βακτηρίων αρχίζει να μειώνεται μόλις η θερμοκρασία υπερβεί τους  $145^{\circ}\text{F}$ , που είναι [ δείτε την εξίσωση (2) ],  $K(145) = 0$ .
- (vi) Όταν ο πληθυσμός βακτηρίων μετριέται  $10^5$  ανά κυβικό εκατοστόμετρο, το κρέας έχει ζωή. Μόλις υπερβούμε αυτόν τον πληθυσμό βακτηρίων, το κρέας δεν μπορεί πλέον να προσφερθεί για την πώληση.

Καθορίστε πόσο καιρό το πολύ το κρέας πρέπει να βράσει στον ατμό για να επιτύχουμε μια ζωή του προϊόντος στο ράφι 16 ημερών. Υποθέστε ότι το κρέας πηγαίνει άμεσα από το λουτρό ατμού  $250^{\circ}\text{F}$  στην περίπτωση ψύξης  $34^{\circ}\text{F}$ . Υποθέστε ότι η ζωή του προϊόντος στο ράφι για 16-ημέρες περιλαμβάνει το χρόνο και της πώλησης. Υποθέστε ότι η μέτρηση της ζωής του προϊόντος στο ράφι αρχίζει τη στιγμή που το κρέας του καβουριού αφαιρείται από το λουτρό ατμού.

## Πρόγραμμα 1

Εκροή ενός ραδιενεργού χυσίματος.

GTP μενταφραστή

Μια λίμνη ύδατος όγκου 5.000.000 γαλόνια τροφοδοτείται από ένα ρεύμα. Υποθέστε ότι το γλυκό νερό ρέει στη λίμνη με ρυθμό 1000 γαλ/λεπτό και ότι το νερό ρέει έξω με τον ίδιο ρυθμό. Σε μια ορισμένη στιγμή, ένα τυχαίο χύσιμο εισάγει 5 λίβρες διαλυτού ραδιενεργού ρύπου στη λίμνη. Υποθέστε ότι η ραδιενεργός ουσία έχει ημιζωή 2 ημέρες και διαλύεται στο νερό της λίμνης για να διαμορφώσει ένα καλά-ανακατωμένο μίγμα.

1. το ποσό ραδιενεργού υλικού μέσα στη λίμνη στο χρόνο  $t$ , που μετριέται από τη στιγμή του χυσίματος. Χρησιμοποιήστε την αρχή διατήρησης [ο ρυθμός αλλαγής του  $Q(t)$  είναι ίσος με το ρυθμό του νερού που εξέρχεται από αυτή] για να παράγετε μια διαφορική εξίσωση περιγράφοντας πώς το  $Q(t)$  αλλάζει με το χρόνο. Λάβετε υπόψιν ότι ο ραδιενεργός ρύπος αφαιρείται και από το νερό που εξέρχεται και από την εξασθένηση της ραδιενέργειάς του. Προσθέστε τον κατάλληλο αρχικό όρο για να λάβετε το πρόβλημα αρχικό.

2. Λύστε το πρόβλημα αρχικής αξίας που διατυπώνεται στο μέρος 1.

3. Πόσο καιρό θα πάρει ώστε η συγκέντρωση του ραδιενεργού ρύπου να μειωθεί στο 0.01% της αρχικής τιμής του;