ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ / Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 13/10/07 ΩΡΑ: 12:00

ΘΕΜΑ 1°: (βαθ. 2)

(α) Αναφέρατε γενικά πληθυσμιακό πρότυπο ενός είδους. Επίσης γενικά ανταγωνιστικά ή συμβιωτής δύο ειδών.

(β) Υποθέτουμε ότι μια χιονομπάλα (X) λιώνει κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρεί σφαιρικό σχήμα. Ποιο από τα παρακάτω μαθηματικά πρότυπα περιγράφει "καλύτερα" το ρυθμό μεταβολής (κατά το λιώσιμο) του όγκου $V=V(t)$ της (X), (t χρόνος):

(i) $\frac{dV(t)}{dt} = kV(t)$, (ii) $\frac{dV(t)}{dt} = kS(t)$ S επιφάνεια της (X)

(iii) $\frac{dV(t)}{dt} = kt$, k σταθερά (θετική, αρνητική) γιατί;

Επιλέξτε το (ii) και βρείτε το $V=V(t)$ όπως επίσης και το $r=r(t)$ (ακτίνα της (X)). Πότε η (X) θα λιώσει;

ΘΕΜΑ 2°: (βαθ. 2)

(α) Βρείτε τις διαστάσεις του k στα μαθηματικά πρότυπα (i), (ii), (iii) του 1ου θέματος.

(β) Διατυπώστε το θεώρημα Π, (Buckingham)

(γ) Γράψτε τη (ii) σε αδιάστατη μορφή (κάνετε κατάλληλη ψηφιοποίηση, V/V_0, t/t_0, κ.λ.π.)

(δ) Στο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$h''(t) = -\frac{R^2 g}{(h(t)+R)^2}, \quad h(0)=0, \quad h'(0)=V_0$$

R, g σταθερές.

με διαστάσεις $[t]$ = χρόνος T, $[h], [R]$ = μήκος L

$[V]$ = ταχύτητα LT^{-1}, $[g]$ = επιτάχυνση LT^{-2}.
Βρείτε τις αδιάστατες ποσότητες.

ΘΕΜΑ 3°: (βαθ. 2)

(α) Να λυθεί προσεγγιστικά (δύο όροι) η εξίσωση:

$$x^3-(6+\varepsilon)x^2+(11+2\varepsilon)x-6+\varepsilon^2=0, \quad 0<\varepsilon<<$$

(Δίνεται: $x^3-6x+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)=0$)

(β) Με τη χρήση των ιδιόμορφων διαταραχών, βρείτε τον πρώτο όρο προσέγγισης και μια ομοιόμορφη λύση για το πρόβλημα:

$$\varepsilon y''(t)-(2t+1)y'(t)+2y(t)=0$$

$$0<t<1, \quad y(0)=y(1)=1, \quad 0<\varepsilon<<1$$

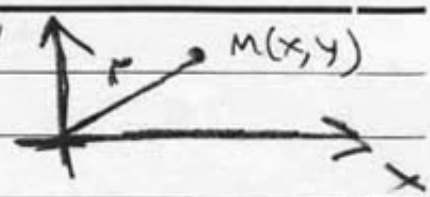
(Δίνεται ότι ομαλό στρώμα βρίσκεται στο $t=1$, κάνει μεταφορά δηλ. θέτοντας $t-1=\xi<0$, κ.λ.π.)

ΘΕΜΑ 4°: (βαθ. 2)

(α) Βρείτε τη χαμηλότερου μήκους καμπύλη που συνδέει το σημείο $A(-2,3)$ με το σημείο $B(2,3)$ και βρίσκεται στον τόπο $y \le x^2$, (στο επίπεδο oxy). (Με χρήση λογισμού μεταβολών)
(Δίνεται συνθήκη εγκαρσιότητας:
$[L+(\sigma'-y')L_{y'}]_B=0$, $y=y(x)$ η ζητούμενη καμπύλη, L Λαγκρανζιανή, $y=\sigma(x)=x^2$.)

(β) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης ενός υλικού σημείου, στο επίπεδο oxy, που έχει αφεθεί από το σημείο της αρχής των αξόνων

με μία δύναμη $F = -\frac{k}{r^2}$, k σταθερά.



(Υποδ. Να χρησιμοποιήσετε την αρχή Hamilton. Δίνεται $E_\Delta = -\int F\,dr$, δυναμική ενέργεια, και ότι $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, χρησιμοποιείστε τεμνόμενες πολικές.)

ΘΕΜΑ 5ο: (βαθ. 2)

(α) Να βρεθεί η ελάχιστη επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα των x, όταν η περιστρεφόμενη καμπύλη $y=y(x)$ ικανοποιεί $y(\alpha)=A$ και $y(\beta)=B$ με $B=\lambda\beta+\mu$ δηλ. το (β, B) βρίσκεται πάνω στην καμπύλη $y=\lambda x+\mu$, λ, μ σταθερές γνωστές (χρησιμοποιείστε τη συνθήκη εγκαρσιότητας του 4ου θέματος).

(β) Βρείτε μία προσέγγιση διαταραχών με δύο όρους, με τη μέθοδο Poincare-Lindstedt, για την εξίσωση

$$\omega^2 y'' + y + y^2 + y^3 = 0, \quad 0<t\ll 1$$

$y=y(t)$.

Υποδ. Χρησιμοποιείστε

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots, \quad y_0 \equiv 0$$

και $\omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \cdots$

Βαθμολογία όταν $\varepsilon>0$: $\beta+\varepsilon-\frac{\beta}{5}$ $\quad 0<\varepsilon\le 3,\ 0<\beta\le 10$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ