



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ
ΓΡΑΠΤΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 8/9/2005, ΩΡΑ: 8.30

Θέμα 1^ο: (Mov. 2)

Κατά τη χημική ένωση δύο στοιχείων A και B παράγεται το Γ. Η παραγωγή γίνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε για 1 γραμμάριο από το A απαιτούνται 4 γραμμάρια από το B. Παρατηρούμε ότι σε 10 λεπτά της ώρας παράγονται 30 γραμμάρια από το Γ. Καθορίστε την ποσότητα του Γ σε κάθε χρονική στιγμή, αν ο ρυθμός της αντίδρασης (παραγωγής του Γ) είναι ανάλογος των ποσοτήτων (του γινομένου) του A και του B που απομένουν κάθε χρονική στιγμή. Δίνεται επίσης ότι αρχικά υπάρχουν 50 γραμμάρια από το A και 32 γραμμάρια από το B. Να βρεθεί η ποσότητα του Γ σε 15 λεπτά και να εξηγηθεί τι συμβαίνει για πολύ-πολύ μεγάλους χρόνους ($t \rightarrow \infty$), (δίνεται $\ln(88/25) = 1,258$).

Θέμα 2^ο: (Mov. 2).

(α) (0.5). Να διατυπώσετε το θεώρημα του Buckingham ή θεώρημα του π .

(β) (1,5). Ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται από ένα νόμο της μορφής $F(E, P, A) = 0$, όπου τα μεγέθη E, P και A παριστάνουν, αντίστοιχα ενέργεια, πίεση και εμβαδόν επιφάνειας. Βρείτε ένα ισοδύναμο φυσικό νόμο που συσχετίζει κατάλληλες αδιάστατες ποσότητες.

Θέμα 3^ο: (Mov. 2,5).

Δίνεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$\varepsilon y''(x) + (x^2 + 1)y'(x) - x^3 y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$
και ότι υπάρχει ένα συνοριακό στρώμα για τη λύση στο $x = 0$. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συναρμογής ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων και να βρεθεί ο πρώτος όρος μίας ομοιόμορφης ως προς το x προσεγγιστικής λύσης διαταραχών.

Θέμα 4° : (Mov. 2,5).

(α) (1). Βρείτε το πιθανό ακρότατο του συναρτησιακού προβλήματος:

$$J(y) = \int_0^1 [xy(x) - (y'(x))^2] dx, \quad y(0)=0, \quad y(1) \text{ ελεύθερο}$$

συνοριακό σημείο πάνω στην ευθεία $x=1$.

(β) (1.5). Σώμα με μάζα m επιταχύνεται μέσα σε χρόνο T , από την ταχύτητα 0 ($v(0)=0$) στην ταχύτητα V ($v(T)=V$). Στη μάζα m επενεργεί δύναμη f και χρησιμεύει για την επιτάχυνση της μάζας αλλά και για την υπερνίκηση της αντίστασης του αέρα που είναι ανάλογη της ταχύτητας. Αν η κατανάλωση του καυσίμου είναι ανάλογη του τετραγώνου της δύναμης (σε χρονική στιγμή), να βρεθεί η ταχύτητα για κάθε χρονική στιγμή, που ελαχιστοποιεί την κατανάλωση του καυσίμου.

Θέμα 5° : (Mov. 1).

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Poincare-Lindstedt, να βρεθούν δύο όροι της προσεγγιστικής λύσης διαταραχών του προβλήματος:

$$y''(x) + y(x) + 3\varepsilon(y'(x))^3, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

(δίνεται: $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$).

$$\nearrow a \leq 10.5 + 1.5 = 12$$

(Τελικός βαθμός = $\min\{10, a\}$, όπου $a = \{\beta\text{βαθμός Θ. } 1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ\} + \min\{(1,5), \beta\text{βαθμός εργασίας}\}, \quad \beta\text{βαθμός εργασιών} \leq 1,5$).

Το 5° θέμα μπορούν να το γράψουν μόνο όσοι δεν έχουν παραδώσει εργασίες.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ