Εξετάσεις HTML 3ο τμήμα Κανονική 22/6/2009

Κατεύθυνση: Μαθηματικός Εφαρμογών 1/6

1.4 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Οι έννοιες «μεγαλύτερος από», «μικρότερος από», που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, ορίστηκαν ως εξής:

Λέμε ότι, ένας αριθμός α είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε $\beta < \alpha$.

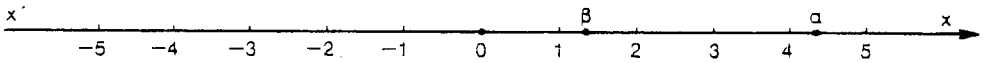
Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα.

$$\boxed{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$$

Γεωμετρικά η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β.



Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\alpha \geqslant \beta$.

Επίσης από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

Αν $\alpha>0$ και $\beta>0$,	**τότε $\alpha+\beta > 0$**
Αν $\alpha<0$ και $\beta<0$,	**τότε $\alpha+\beta<0$**
Αν α,β ομόσημοι,	**τότε $\alpha\beta>0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$**
Αν α,β ετερόσημοι,	**τότε $\alpha\beta<0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$**
Για κάθε αριθμό α ισχύει	**$\alpha^2 \geqslant 0$**

Ιδιότητες των ανισοτήτων

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$, μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων.

2/6

1.

Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)

2.

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\gamma$
Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

3.

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha+\gamma > \beta+\delta$
Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει: Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Δηλαδή, αν π.χ.

$$\alpha_1 > \beta_1 \ , \ \alpha_2 > \beta_2 \ , \ \alpha_3 > \beta_3 \ , \text{ τότε } \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 > \beta_1+\beta_2+\beta_3$$

Αν επιπλέον τα μέλη τους είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 > \beta_1\beta_2\beta_3$.

Σύμφωνα με την τελευταία ιδιότητα, αν δύο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση.

Π.χ. $2<5$ και $6<10$, αλλά $2-6 > 5-10$

Επίσης αν δύο ανισότητες της ίδιας φοράς, με θετικούς όμως όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο με τη διαίρεση.

Π.χ. $5<6$ και $10<30$, αλλά $\frac{5}{10} > \frac{6}{30}$

4.

Για θετικούς αριθμούς α, β **και** ν **φυσικό** $\neq 0$ **ισχύει:** $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$ $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$

3/6

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- i) Έστω ότι $\alpha = \beta$. Τότε, όπως είναι γνωστό, θα είναι και $\alpha^\nu = \beta^\nu$
  ii) Έστω ότι $\alpha > \beta$. Επειδή οι α, β είναι θετικοί, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ν ανισοτήτων

$$\alpha > \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \ldots, \quad \alpha > \beta$$

βρίσκουμε ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$

- Αντιστρόφως:
  i) Έστω $\alpha^\nu = \beta^\nu$. Τότε θα είναι και $\alpha = \beta$, γιατί αν υποθέσουμε ότι $\alpha \neq \beta$, τότε:
  — αν $\alpha > \beta$ θα είναι και $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ
  — αν $\beta > \alpha$ θα είναι και $\beta^\nu > \alpha^\nu$ (άτοπο).
  ii) Έστω ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$. Τότε θα είναι και $\alpha > \beta$, γιατί αν υποθέσουμε ότι $\alpha \leqslant \beta$, τότε:
  — αν $\alpha = \beta$, θα είναι και $\alpha^\nu = \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ
  — αν $\alpha < \beta$, θα είναι και $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **i) Να αποδειχθεί ότι, αν α, β ομόσημοι, τότε:** $\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$

   ii) Να αποδειχθεί ότι, $\alpha^2 + \beta^2 \geqslant 2\alpha\beta$

   iii) Να αποδειχθεί ότι,

   αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geqslant 2$

   αν $\alpha < 0$, τότε $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \leqslant -2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αφού οι α, β είναι ομόσημοι ισχύει $\alpha\beta > 0$. Επομένως ισχύει:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

ii) Επειδή όπως είναι γνωστόν, ισχύει

$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geqslant 0$, έπεται ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geqslant 2\alpha\beta$.

iii) Έχουμε διαδοχικά $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geqslant 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geqslant 2\alpha$ [αφού $\alpha > 0$]

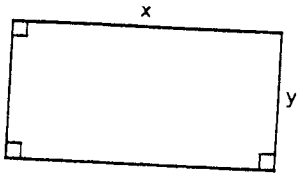
$\Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha \geqslant 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geqslant 0$ που ισχύει

Για την άλλη ανισότητα εργαζόμαστε αναλόγως

2. **Να αποδειχθεί ότι $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$. Στη συνέχεια να βρείτε ποιο από όλα τα ορθογώνια με την ίδια περίμετρο έχει το μέγιστο εμβαδό.**

4/6

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ισχύει $(x+y)^2 - (x-y)^2 = (x+y+x-y)(x+y-x+y)$
$= 2x \cdot 2y = 4xy.$

Αν x,y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε η περίμετρός του είναι $2x+2y$ και έστω $2x + 2y = 2\kappa$ (σταθερή). Επομένως $x + y = \kappa$ (σταθερό). Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι $E = x \cdot y$ και σύμφωνα με την προηγούμενη ταυτότητα είναι:

$$E = xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2] = \frac{1}{4}[\kappa^2 - (x-y)^2]$$

Προφανώς η παράσταση αυτή παίρνει τη μέγιστη τιμή, αν $(x-y)^2 = 0$, που ισχύει, όταν $x=y$. Άρα το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδό.

3. Αν $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ και $-\frac{2}{3} < y < \frac{5}{6}$, να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή της παράστασης $8x - 12y + 3$.

ΛΥΣΗ

Από την ανισότητα $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ έχουμε διαδοχικά:

$$8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) < 8x < 8 \cdot \frac{3}{4}$$

$$-4 < 8x < 6 \qquad (1)$$

Ομοίως από την $-\frac{2}{3} < y < \frac{5}{6}$ έχουμε διαδοχικά:

$$12\left(-\frac{2}{3}\right) < 12y < 12 \cdot \frac{5}{6}$$

$$-8 < 12y < 10$$

$$8 > -12y > -10$$

$$-10 < -12y < 8 \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη της ομόστροφες ανισότητες (1) και (2) και έχουμε:

$$-14 < 8x - 12y < 14 \text{ , οπότε}$$

$$-14+3 < 8x-12y+3 < 14+3$$

Άρα

$$-11 < 8x-12y+3 < 17$$

5/6

4. Να αποδειχθούν οι ανισότητες:

i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \geqslant 0$ ii) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2 \geqslant 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 &= \frac{1}{2}[2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2]\\ &= \frac{1}{2}[\alpha^2+\beta^2+(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)]\\ &= \frac{1}{2}[\alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)^2] \geqslant 0,\end{aligned}$$

ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν όλες οι βάσεις είναι μηδέν, δηλαδή μόνο όταν $\alpha=0$ και $\beta=0$.

1.5 Οι ανισώσεις: $\alpha x+\beta>0$ και $\alpha x+\beta<0$

Γνωρίσαμε στο Γυμνάσιο τη διαδικασία επίλυσης μιας ανίσωσης της μορφής $\alpha x+\beta>0$ ή της μορφής $\alpha x+\beta<0$, με α,β συγκεκριμένους αριθμούς.
Γενικότερα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta>0 &\Leftrightarrow \alpha x+\beta-\beta>-\beta\\ &\Leftrightarrow \alpha x>-\beta\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\alpha>0$, τότε:

$$\alpha x>-\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha}>\frac{-\beta}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow x>-\frac{\beta}{\alpha}$$

- Αν $\alpha<0$, τότε:

$$\alpha x>-\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha}<\frac{-\beta}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow x<-\frac{\beta}{\alpha}$$

- Αν $\alpha=0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0x>-\beta$, η οποία
i) αληθεύει για κάθε τιμή του x, αν είναι $\beta>0$, ενώ
ii) είναι αδύνατη, αν είναι $\beta\leqslant 0$.

Ας λύσουμε τώρα μερικές ανισώσεις της μορφής αυτής.

6/6

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

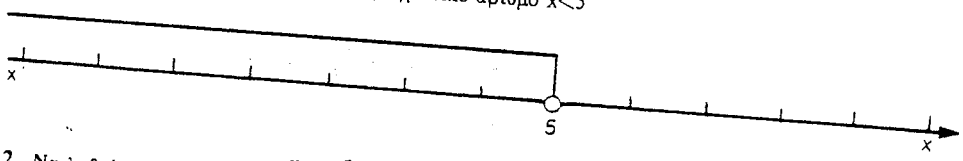
1. Να λυθεί η ανίσωση $2(x+4)-(x+6)<12-x$

ΛΥΣΗ

$$2(x+4)-(x+6)<12-x \Leftrightarrow 2x+8-x-6<12-x$$

$$\Leftrightarrow 2x-x+x<12+6-8 \Leftrightarrow 2x<10 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}<\frac{10}{2} \Leftrightarrow x<5$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x<5$



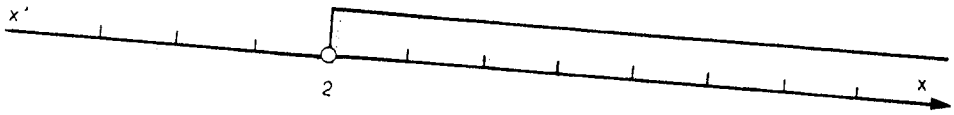
2. Να λυθεί η ανίσωση $2x+\frac{x}{6}+\frac{5}{3}>2(1+x)$

ΛΥΣΗ

$$2x+\frac{x}{6}+\frac{5}{3}>2(1+x) \Leftrightarrow 12x+x+10>12(1+x)$$

$$\Leftrightarrow 12x+x+10>12+12x \Leftrightarrow x>2$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x>2$.



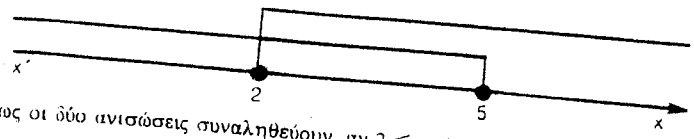
3. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$2(x+4)-(x+6)\leqslant 12-x \quad \text{και} \quad 2x+\frac{x}{6}+\frac{5}{3}\geqslant 2(1+x)$$

ΛΥΣΗ

Για να βρούμε τις κοινές τους λύσεις, λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και παριστάνουμε τις λύσεις τους πάνω στον ίδιο άξονα. Από εκεί βρίσκουμε τις κοινές τους λύσεις.

Αν εργαστούμε όπως στα παραδείγματα 1 και 2, βρίσκουμε ότι η πρώτη αληθεύει για κάθε $x\leqslant 5$, ενώ η δεύτερη για κάθε $x\geqslant 2$.



Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν, αν $2\leqslant x\leqslant 5$.