

Γραμμικά μοντέλα και σχεδιασμοί

Ιούλιος 2009

- Θέμα 1** α) Τέσσερα αυτοκίνητα (C , στήλες) και τέσσερις οδηγοί (B , γραμμές) χρησιμοποιούνται στη μέλετη πιθανών διαφορών στην μείωση των καυσαερίων των μηχανών με τη χρήση τεσσάρων διαφορετικών προσθετικών καυσίμου (A , λατινικά γράμματα). Για τη μελέτη του πειράματος χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω λατινικό τετράγωνο τάξης 4, και μετρήθηκε η μείωση των ρύπων σε κάθε πειραματική εκτέλεση.

Οδηγός	Αυτοκίνητο			
	1	2	3	4
1	A 20	B 26	D 19	C 25
2	D 22	C 26	A 19	B 27
3	B 14	D 12	C 15	A 15
4	C 16	A 14	B 20	D 18

90
94
56
68

- i) Να γίνει η ανάλυση των δεδομένων και να εξαχθούν συμπεράσματα ($\alpha = 0.05$).
(Δίνεται $F_{(3,6,0.05)} = 4.76$)
- ii) Να χωριστούν οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα 'Οδηγός' σε ομάδες με τη μέθοδο του *Duncan*. (Δίνονται $r_{0.05}(2,6) = 3.46$, $r_{0.05}(3,6) = 3.58$, $r_{0.05}(4,6) = 3.64$).
- iii) Χρησιμοποιώντας τις ορθογώνιες αντιθέσεις $A_1 = (-3, -1, 1, 3)$, $A_2 = (1, -1, -1, 1)$, $A_3 = (-1, 3, -3, 1)$ να διασπάσετε το *SSA* σε 3 ανεξάρτητα ανθροίσματα με 1 βαθμό ελευθερίας το καθένα. Να βρεθεί ο συντελεστής του A_1 του μοντέλου παλινδρόμησης. Να γίνει ο έλεγχος: $H_0: \beta_{A_1} = 0$, $H_1: \beta_{A_1} \neq 0$ σε σ.σ. $\alpha = 0.05$
(Δίνεται $t(6, 0.025) = 2.447$). $SSA = SSA_1 + SSA_2 + SSA_3$
- β) Θεωρούμε το μοντέλο ανάλυσης διασποράς με δύο παράγοντες, μικτών επιδράσεων: $Y_{ijk} = \mu + a_i + \beta_j + (a\beta)_{ij} + e_{ijk}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, $k = 1, \dots, r$. Να δείξετε ότι:

$$E(MSA) = \sigma^2 + r\sigma_{a\beta}^2 + \frac{qr \sum_{i=1}^p a_i^2}{p-1}.$$

- Θέμα 2** α) Μια εταιρεία παραγωγής βενζίνης μελετά την επίδραση τεσσάρων φορτηγών στην ποσότητα βενζίνης που μεταφέρεται. Για το πείραμα χρησιμοποιεί τέσσερα μπλοκ, όπου κάθε μπλοκ είναι ένας διαφορετικός οδηγός. Στο χώρο που γίνεται το πείραμα υπάρχουν τρία βενζινάδικα. Ο μηχανικός της εταιρείας αποφάσισε να κάνει το πείραμα σύμφωνα με ένα τετράγωνο *Youden* με τέσσερις γραμμές (οδηγοί ή μπλοκ) τρεις στήλες (βενζινάδικα) και τέσσερις αγωγές (φορτηγά). Τα κωδικοποιημένα δεδομένα δίνονται στο πίνακα:

Οδηγός (μπλοκ)	Βενζινάδικο		
	1	2	3
1	$A = 3$	$B = 3$	$C = 10$
2	$B = 2$	$C = 8$	$D = 3$
3	$C = 9$	$D = 1$	$A = 2$
4	$D = 4$	$A = 2$	$B = 2$

16
13
13
12
8

13
7
7
27
8

$$SST = \dots$$

Τροπ. (adj) αφρ γη γραμμές

$$1 \quad \checkmark = 4 \\ b = 4$$

$$Q_1 = 2 + 7 + 8 + 7$$

$$r = 3 \\ k = 3 \\ \gamma = 2$$

$$3 + 2 + 2 \\ 3 + 2 + 2 \\ 10 + 8 + 8 \\ 3 + 1 + 4$$

4x4 = πίνακας
σχεδιασμοί
ειδη

~~n x n²~~ ~~x n²~~ ~~x n²~~

n

n

- i) Να κάνετε τη στατιστική ανάλυση και να ελέγξετε αν τα επίπεδα φορτηγών (αγωγές) είναι σημαντικά σε στάθμη σημαντικότητας $\alpha = 0.05$. (Δίνεται $F_{(3,3,0.05)} = 9.28$)
- ii) Να βρείτε τις intrablock $\{\hat{r}_i\}$ εκτιμήσεις των επιδράσεων των αγωγών και να τις χωρίσετε σε ομάδες με τη μέθοδο του Duncan ($\alpha=0.05$). (Δίνονται $r_{0.05}(2,3) = 4.50$, $r_{0.05}(3,3) = 4.50$, $r_{0.05}(4,3) = 4.50$).

- ✓ β) Έστω C και D είναι δύο ορθογώνιες αντιθέσεις που ορίζονται στα αθροίσματα των παρατηρήσεων ενός παράγοντα, με n επίπεδα και n παρατηρήσεις σε κάθε επίπεδο. ($C = \sum_{i=1}^v c_i y_i$, $D = \sum_{i=1}^v d_i y_i$). Να δείξετε ότι $Cov(C, D) = 0$.

- Θέμα 3 ↗ a) Θεωρούμε το γραμμικό μοντέλο: $Y_{ij} = p_i + \kappa_j + \tau_{\kappa(i,j)} + e_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, που αντιστοιχεί σε ένα $n \times n$ Λατινικό τετράγωνο. Αν R , C και T είναι οι $n^2 \times n$ ($0, 1$) πίνακες αντιστοίχισης των γραμμών, στηλών και αγωγών, να βρείτε τις εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων των παραμέτρων του μοντέλου.

- ↗ b) Έστω ένας 2^4 παραγοντικός σχεδιασμός με 2 επαναλήψεις. Να βρείτε τις εκτιμήσεις των επιδράσεων A, D, BC , καθώς επίσης και τις διασπορές τους.

- Θέμα 4 ↗ a) Ένας μηχανικός ενδιαφέρεται να μελετήσει τις επιδράσεις τριών παραγόντων (A : ταχύτητα κοπής), (B : σχήμα εργαλείου) και (C : γωνία κοπής) στην διάρκεια ζωής ενός εργαλείου. Επιλέχτηκε ένα 2^3 παραγοντικό πείραμα με δύο επαναλήψεις και οι συνδυασμοί των αγωγών με την απόκριση του πειράματος έχουν ως εξής:

Συνδυασμός αγωγών	Επαναλήψη	
	I	II
(1)	16	25
a	26	37
b	31	27
ab	51	40
c	38	42
ac	34	30
bc	56	46
abc	33	37

- ✓ i) Να γίνει η ανάλυση των δεδομένων για την εύρεση σημαντικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων.
- ✓ ii) Να δοθεί ο πίνακας ανάλυσης διασποράς. (Δίνεται $F_{(1,8,0.05)} = 5.32$).
- ✓ iii) Να βρεθεί η διασπορά των εκτιμήσεων των κυρίων επιδράσεων καθώς και ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή αυτών. (Δίνεται $t_{(8,0.025)} = 2.306$).

- ✗ Να δείξετε ότι η προβολή ενός 2^k , $k > 2$ παραγοντικού σχεδιασμού σε δύο παράγοντες αποτελείται από $\frac{2^k}{4}$ επαναλήψεις του 2^2 παραγοντικού σχεδιασμού.

~~21781~~ - $\frac{569^2}{4 \cdot 2} = 1555,9375$ $n \times n^2 \times n^2$

40

Διάρκεια εξέτασης 2:30 ώρες

$$\begin{array}{l} a-b \\ b-a \end{array}$$

$$\Rightarrow F \Rightarrow \text{σημείωση}$$

$$\begin{array}{r} 3.0625 \\ 333.0625 \\ \hline 1.5625 \\ \hline 248.0625 \end{array}$$

$$\frac{1.5625}{n \cdot 2^2} = \frac{0^2}{8}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 16} =$$

904.5

$$\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 \quad 18.0625 \quad 45.5625$$

$$\begin{array}{l} A \\ AC \\ B \end{array}$$

$$D_{63}$$