

Κωνσταντίνος Σερδαρ

Εξέταση στον Βέλτιστο Έλεγχο 26/6/2009, ΣΕΜΦΕ 8° Εξάμηνο

✓ Θέμα 1. (α) Δείξτε ότι η λύση της Riccati

$$\dot{P} = -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q, \quad P(T) = F, (R > 0, Q \geq 0, F > 0)$$

είναι συμμετρικός πίνακας. (β) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Riccati επιλύσατε το πρόβλημα

$$\dot{x} = u, J(u) = 2x^2(1) + \int_0^T (x^2 + u^2) dt \rightarrow \min, x(0) = 5$$

Θέμα 2. Επίλυση του προβλήματος $\dot{x} = x + u, J(u) = \int_0^T (u^2 - x^2) dt \rightarrow \min, x(0) = 1$

✓ Θέμα 3. Μελέτη του προβλήματος

$$\dot{x}_1 = x_2 u, \dot{x}_2 = u, J(u) = x_1^2(1) + 2x_2^2(1) + \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min, (x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{R}^2$$

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο υποψήφιος άριστος έλεγχος είναι σταθερός στο διάστημα $[0,1]$). Εξεταστε αν υπαρχει λύση στην περιπτωση $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$.

Θέμα 4. Επίλυση του προβλήματος $\dot{x} = 2x + u, J(u) = \frac{1}{2} x^2(1) + \int_0^T (x + u) dt, |u(\cdot)| \leq 1, x(0) = 2, -2$

✓ Θέμα 5. (α) Μελέτη του προβλήματος αρίστου χρόνου για το σύστημα $\dot{x}_1 = -x_1 + u, \dot{x}_2 = 2u, |u(\cdot)| \leq 1$. (β) Δείξτε ότι τα προσιτα συνολα του ελεγκμου σύστηματος $\dot{x} = Ax + ub, |u(\cdot)| \leq 1$ ειναι αυστηρως κυρτα.

✓ Θέμα 6. Για το ελέγκμο σύστημα $\dot{x} = Ax + ub, |u(\cdot)| \leq 1$, δείξτε ότι, αν ικανοποιείται η αρχή του μεγίστου στο διάστημα $[0, t]$, τοτε ο αντιστοιχος έλεγχος έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών σε αυτο το διαστημα και η αντιστοιχη τροχιά ειναι ακρότατη στο $[0, \tau]$, $\forall t \in [0, \tau]$.

✓ Θέμα 7. Αρχή Μεγίστου για το πρόβλημα

$$\dot{x} = Ax + bu, J(u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min.$$

Δείξτε ότι οι μεταβολες $\delta x(\cdot), \delta J(\cdot)$ της υποψήφιας λύσης και κόστους, ικανοποιουν:

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = A\delta x + b\delta u \text{ με } \delta x(0) = 0 \text{ και } \delta J(u) = g_x(x(t))\delta x(T) + \int_0^T ((f_0)_x \delta x(t) + (f_0)_u \delta u(t)) dt,$$

αντιστοιχα. Στην συνέχεια αποδείξτε την αρχή του μεγίστου για το παραπανω πρόβλημα.

Επιλογη: 5 θεματα, διαρκεια 2 ½ ωρες

Laplace:

$$t^n \exp(-at) / n! \rightarrow 1 / (s+a)^{n+1}$$

$$\sin kt \rightarrow k / (k^2 + s^2), \cos kt \rightarrow s / (k^2 + s^2)$$