

**ΣΕΜΦΕ - 9<sup>ο</sup> Εξάμηνο  
ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ  
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**  
4-3-2008

1. Έστω το γενικό (ακριβές) πρόβλημα σε ένα χώρο Hilbert  $V$ :  
 Να βρεθεί  $u \in V$  τέτοιο ώστε  
 $B(u, v) = F(v), \forall v \in V$ .
- i. Να διατυπωθεί λεπτομερώς το Θεώρημα Lax-Milgram και να δειχθεί ότι  
 $\|u\| \leq c \|F\|, c > 0$ .
- ii. Να οριστεί το προσεγγιστικό πρόβλημα Galerkin και να αποδειχθεί η γενική εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου Galerkin.
2. i) Να δοθεί ο ορισμός της  $\alpha$ - $L^2$ -παραγώγου μιας συνάρτησης  $f \in L^2(\Omega)$ .  
 ii) Να βρεθεί η ασθενής μορφή του προβλήματος συνοριακών τιμών  

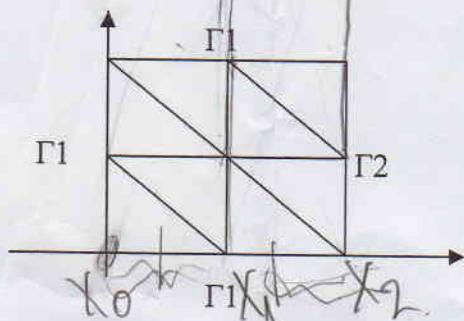
$$-u'' + g(x)u = f, \text{ στο } I = (0, 1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$
 • όπου  $g \in C(\bar{I}), g(x) \geq 0, \forall x \in \bar{I}, f \in L^2(I)$ , σε κατάλληλο χώρο Sobolev  $V$ .  
 Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι έχει μοναδική ασθενή λύση στο  $V$ .

3. Να δοθούν οι ιδιότητες των συναρτήσεων κατά τιμήματα τετραγωνικών, Hermite και splines (με μηδενικές τιμές της συνάρτησης στα άκρα), δηλ. βαθμός πολυωνύμων, ομαλότητα, διάσταση του διανυσματικού χώρου που αποτελούν (η οποία και να δικαιολογηθεί με τους βαθμούς ελευθερίας), παρεμβολικές συνθήκες, σχήματα των συναρτήσεων βάσης, δομή του πίνακα Galerkin, και τάξη του  $h$  στην εκτίμηση σφάλματος με τη νόρμα του  $H^1$ .

4. Δίνεται το μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών (βλ. Σχήμα)

$$-\Delta u = f \text{ στο } \Omega, \quad u = 0 \text{ στο } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = p \text{ στο } \Gamma_2.$$



- a) Να τεθεί το πρόβλημα αυτό σε ασθενή μορφή, ορίζοντας τον αντίστοιχο κατάλληλο υπόχωρο  $V$  ενός χώρου Sobolev δοκιμαστικών συναρτήσεων.  
 b) Με τον τριγωνισμό του Σχήματος, να επιλεγούν κατάλληλες συναρτήσεις βάσης ενός υπόχωρου  $V_n$  του  $V$  προσεγγιστικών συναρτήσεων, συνεχών και κατά τρίγωνα γραμμικών, και να εφαρμοστεί η μέθοδος Galerkin. Να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα  $A$  και του διανύσματος  $b$  του γραμμικού συστήματος Galerkin  $Ac = b$  που προκύπτει, στην περίπτωση  $f = 1, p = 0$  με τον τριγωνισμό των σχήματος. (χρησιμοποιήστε και έναν κατάλληλο τύπο ολοκλήρωσης σε τρίγωνο).

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες, Τα θέματα είναι ισοδύναμα