

(Εργασία Ιητζικής)
ΑΛΓΕΒΡΑ 1

ΣΕΜΦΕ, 10-X-2007
Διδάσκων Ε. Αγγελόπουλος

Σ' ότι ακολουθεί, η κυκλική ομάδα τάξης n ($n > 1$), με γεννήτορα το στοιχείο γ θα συμβολίζεται με C_n ή $\langle \gamma \rangle$. Η πράξη της ομάδας θα συμβολίζεται πολλαπλασιαστικά, ούτως ώστε το σύνολο των στοιχείων της ομάδας να είναι $\{1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}\}$ με $\gamma^0 = \gamma^n = 1$. Η αντίστοιχη διεδρική ομάδα, τάξης $2n$, ημιευθύ γινόμενο των $C_2 = \langle \delta \rangle$ και $C_n = \langle \gamma \rangle$, με γεννήτορες γ και δ , όπου γ όπως παραπάνω και $\delta^2 = 1$, $\delta\gamma = \gamma^{-1}\delta$, θα σημειώνεται D_n ή $\langle \gamma, \delta \rangle$.

- 1) Να δειχτεί επαγγελματικά ότι $\delta\gamma^k = \gamma^k\delta$ για κάθε θετικό ακέραιο και ότι $(\gamma^k\delta)^2 = 1$. Να βρεθούν τα δεξιά και αριστερά σύμπλοκα των υποομάδων $\langle \gamma \rangle$ και $\langle \delta \rangle$, να διερευνηθεί κατά πόσο συμπίπτουν και να εξεταστεί αν οι υποομάδες αυτές είναι κανονικές ή όχι.
- 2) Να βρεθούν οι κλάσεις συζυγίας όλων των στοιχείων της D_n . Ειδικότερα, να δειχτεί ότι το σύμπλοκο $\langle \gamma \rangle\delta$ χωρίζεται σε μία ή δύο κλάσεις συζυγίας, ανάλογα με την αρτιότητα του n .
- 3) Έστω $\text{End}(C_n)$ το σύνολο των ενδομορφισμών της C_n δηλαδή των συναρτήσεων f από C_n προς C_n που ικανοποιούν $f(xy) = f(x)f(y)$. Δ.ο. κάθε ενδομορφισμός f είναι πλήρως καθορισμένος από την εικόνα $f(\gamma)$ του γεννήτορα γ . Δ.ο. το $\text{End}(C_n)$ έχει ακριβώς n στοιχεία, είναι κλειστό σύνολο ως προς τη σύνθεση συναρτήσεων, και ότι η σύνθεση είναι αντιμεταθετική πράξη στο σύνολο $\text{End}(C_n)$.
- 4) Έστω $\text{Aut}(C_n)$ το σύνολο των αυτομορφισμών της C_n δηλαδή των αντιστρεψίων ενδομορφισμών. Δ.ο. το $\text{Aut}(C_n)$ αποτελεί αιβελιανή ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων. Δ.ο. ένας ενδομορφισμός είναι αυτομορφισμός εάννη η εικόνα του γενήτορα γ είναι επίσης γενήτορας της C_n .
- 5) Δ.ο. $\text{Aut}(C_8)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα του Klein, V_4 .
- 6) (Άσκηση για το σπίτι) Δ.ο. οι τρεις μη τετριμένες επεκτάσεις του C_8 από το C_2 , $\langle a, \gamma \rangle$, $\langle \beta, \gamma \rangle$ και $\langle \delta, \gamma \rangle$, με $a\gamma = \gamma^3a$, $\beta\gamma = \gamma^5\beta$, $\delta\gamma = \gamma^{-1}\beta$ είναι μη ισόμορφες ανά δύο, και μελετήστε τις.
- 7) (Άσκηση για το σπίτι) Δ.ο. η D_n είναι ισόμορφη με την ομάδα γεωμετρικών μετασχηματισμών (συμμετριών και στροφών) που διατηρούν το κανονικό n -γώνο.