Εργασία 2 (σύντομες απαντήσεις)

1. α) $(1,1,7)=(u,\ v-u,\ u^3+3uv) \Leftrightarrow u=1,\ v=2$

β) $\bar{x}_u=(1,-1,3u^2+3v)$, $\bar{x}_u(1,2)=(1,-1,9)$

$\bar{x}_v=(0,1,3u)$, $\bar{x}_v(1,2)=(0,1,3)$

$\bar{x}_u\times\bar{x}_v=(-3u-3u^2-3v,\ -3u,\ 1)$, $\bar{x}_u\times\bar{x}_v(1,2)=(-12,-3,1)$

Άρα $U(p)\parallel(-12,-3,1)$

Παρατηρούμε ότι $\bar{v}\cdot(-12,-3,1)=(2,1,27)\cdot(-12,-3,1)=0$

Άρα $\bar{v}\in T_pM$. Ζητούμε k,λ ώστε:

$$\bar{v}=(2,1,27)=k(1,-1,9)+\lambda(0,1,3) \Rightarrow k=2,\ \lambda=3$$

Άρα $\bar{v}=2\bar{x}_u+3\bar{x}_v$

Για το $\bar{w}=(2,2,27)$ ισχύει $(2,2,27)\cdot U_p\neq 0 \Rightarrow$ δεν είναι εφαπτόμενο.

γ). $\bar{\alpha}(t)=\bar{x}(\bar{\varphi}(t))=\bar{x}(t,2t)=(t,\ 2t-t,\ t^3+3t\cdot 2t)$

$\Rightarrow \bar{\alpha}(t)=(t,t,t^3+6t^2)$, $\bar{\alpha}(t)=(1,1,7)\Rightarrow t=1$.

άρα διέρχεται για $t=1$ από το P.

$\alpha'(t)=(1,1,3t^2+12t)$, $\alpha''(t)=(0,0,6t+12)$

$\alpha'(1)=(1,1,15)$, $\alpha''(1)=(0,0,18)$

Αφού $\alpha'(1)\in T_pM$ θα έχει μηδενική συνιστώσα ως προς U

$\alpha'(1)=(1,1,15)=k_1(1,-1,9)+k_2(0,1,3)\Rightarrow k_1=1,\ k_2=2$

δηλ. $\alpha'(1)=\bar{x}_u+2\bar{x}_v+0U$

Επίσης $\alpha''(1)=(0,0,18)=\mu_1(1,-1,9)+\mu_2(0,1,3)+\frac{\mu_3}{\sqrt{154}}(-12,-3,1)$

από όπου προκύπτουν τα μ_1,μ_2,μ_3

2. Α). $S\bar{x}_u=0\bar{x}_u+1\cdot\bar{x}_v$, $S\bar{x}_v=4\bar{x}_u+0\bar{x}_v$. Άρα ο S έχει πίνακα ως προς τη βάση $\{\bar{x}_u,\bar{x}_v\}$ τον $[S]=\begin{bmatrix}0&4\\1&0\end{bmatrix}$

Ιδιοτιμές του $[S]$: $k_1=2$, $k_2=-2$

Άρα $K=k_1k_2=-4$, $2H=k_1+k_2=0$.

Β) κύριες διευθύνσεις: προκύπτουν από τα ιδιοδιανύσματα $\bar{v}_1=(2,1)$ και $\bar{v}_2=(-2,1)$ $\Rightarrow \bar{w}_1=2\bar{x}_u+\bar{x}_v$, $\bar{w}_2=-2\bar{x}_u+\bar{x}_v$

Δεν υπάρχει $\bar{v}$ με $k(\bar{v})=4$ διότι $\max k(\bar{v})=2=k_1$

Γ) Αφού $K<0$ το σημείο είναι υπερβολικό (σχ. 5 σελ 104)

Δ) $N=\bar{x}_v\cdot S\bar{x}_v=\bar{x}_v\cdot 4\bar{x}_u=4\bar{x}_u\cdot\bar{x}_v=4F$. Αλλά $\bar{x}_v\cdot 4\bar{x}_u=$

$=S\bar{x}_u\cdot 4\bar{x}_u=4L\Rightarrow 4L=N=4F$. Όμοια. $G=\bar{x}_v\cdot\bar{x}_v=$

$=\bar{x}_v\cdot S\bar{x}_u=M=\bar{x}_u\cdot S\bar{x}_v=\bar{x}_u\cdot 4\bar{x}_u=4F$

3) Ο πίνακας του S ως προς τη βάση $\{\bar{x}_u, \bar{x}_v\}$ είναι $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ με χαρ. εξίσωση: $\lambda^2+1=0$ με μιγαδικές ρίζες. Όμως ο $[S]$ ως πίνακας συμμετρικού μετασχηματισμού οφείλει να έχει πραγμ. ιδιοτιμές.

4) $\bar{x}(u,v) = \bar{\beta}(u) + v\bar{\delta}(u)$

$\bar{x}_u = \beta'(u) + v\bar{\delta}'(u)$, $\bar{x}_v = \bar{\delta}(u)$

$\bar{x}_{uu} = \beta''(u) + v\delta''(u)$, $\bar{x}_{uv} = \bar{\delta}'(u)$, $\bar{x}_{vv} = 0$.

$E = (\bar{\beta}'(u) + v\bar{\delta}'(u))\cdot(\bar{\beta}'(u) + v\bar{\delta}'(u)) = 1 + v^2 + 2v\bar{\beta}'(u)\cdot\bar{\delta}'(u)$.

$F = \beta'(u)\cdot\bar{\delta}(u) + v\bar{\delta}'(u)\cdot\bar{\delta}(u) = \beta'(u)\cdot\delta(u)$.

$$U = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{\|\bar{x}_u \times \bar{x}_v\|} = \frac{1}{\|\bar{x}_u \times \bar{x}_v\|}(\beta' + v\delta')\times\delta$$

Από τις (5.29) σελ 102 $\Rightarrow N=0$ και από τον τύπο (5.34) σελ 105 $\Rightarrow K = \dfrac{-M^2}{EG-F^2} \leq 0$

5) $\bar{x}(u,v) = (v, e^v\cos u, e^v\sin u)$, $(u,v)\in(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$.

$f(x,y,z) = (e^{2x} - (y^2+z^2)+1)y$

$\tilde{f}(u,v) = f(\bar{x}(u,v)) = (e^{2v} - e^{2v}+1)e^v\cos u = e^v\cos u$

$D_{\bar{x}_u}f = (f\circ\bar{x})_u = \tilde{f}_u = -e^v\sin u$, $D_{\bar{x}_v}f = \tilde{f}_v = e^v\cos u$.

Άρα $p = \bar{x}(0,0) = (0,1,0)$, $D_{x_u}f\big|_p = \tilde{f}_u(0,0) = 0$

$D_{x_v}f\big|_p = \tilde{f}_v(0,0) = 1$.

Για το $\bar{V}_p$ εργαζόμαστε ως εξής: $\bar{x}_u = (0, -e^v\sin u, e^v\cos u)$

$\Rightarrow \bar{x}_u(0,0) = (0,0,1)$

$\bar{x}_v = (1, e^v\cos u, e^v\sin u) \Rightarrow \bar{x}_v(0,0) = (1,1,0)$

οπότε $\bar{V}_p = (1,1,2) = \kappa(0,0,1) + \lambda(1,1,0) = 2(0,0,1)+(1,1,0)$
$= 2\bar{x}_u + \bar{x}_v$

Άρα

$$D_{V_p}f\big|_p = 2\cdot D_{x_u}f\big|_p + 1\cdot D_{x_v}f\big|_p = 2\tilde{f}_u(0,0) + 1\cdot\tilde{f}_v(0,0) = 1.$$

6) $\bar{x}(u,v)=(f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ v)$ $\quad (u,v)\in(0,2\pi)\times(1,3)$

A) $(f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ v)=(0,\ f(4),\ 4) \iff u=\pi/2 \quad v=4$

B) $\bar{x}_u=(-f(v)\sin u,\ f(v)\cos u,0)$

$\bar{x}_v=(f'(v)\cos u,\ f'(v)\sin u,\ 1)$ Άρα:

$\bar{x}_u(\pi/2,4)=(-f(4)\cdot 1,\ f(4)\cdot 0,\ 0)=(-1,0,0)$

$\bar{x}_v(\pi/2,4)=(f'(4)\cdot 0,\ f'(4)\cdot 1,\ 1)=(0,2,1)$

$T_pM=[(-1,0,0),(0,2,1)]$, $\quad U \parallel \bar{x}_u\times\bar{x}_v=(0,1,-2)$

$V\cdot(\bar{x}_u\times\bar{x}_v)=(-3,10,5)\cdot(0,1,-2)=0 \Rightarrow V\in T_pM$

$V=(-3,10,5)=k\cdot(-1,0,0)+\lambda(0,2,1)=3(-1,0,0)+5(0,2,1)$

Γ) Αμέσως από το Β)

Δ) $E=\bar{x}_u\cdot\bar{x}_u=f^2(v)$, $F=\bar{x}_u\cdot\bar{x}_v=0$, $G=f'^2(v)+1$.

Ομοίως για τα L, M, N.

Ε) $(0,1,4)=\bar{x}($ $\quad$, $U(\pi/2,4)=\frac{1}{\sqrt5}(0,1,-2)$

$\bar{x}_{uu}=(-f(v)\cos u,\ -f(v)\sin u,0) \Rightarrow \bar{x}_{uu}(\pi/2,4)=(0,-1,0)$

$\bar{x}_{uv}=(-f'(v)\sin u,\ f'(v)\cos u,0) \Rightarrow \bar{x}_{uv}(\pi/2,4)=(-1,0,0)$

$\bar{x}_{vv}=(f''(v)\cos u,\ f''(v)\sin u,0) \Rightarrow \bar{x}_{vv}(\pi/2,4)=(0,f''(4),0)$

$L=\bar{x}_{uu}\cdot U=-1/\sqrt5$, $M=\bar{x}_{uv}\cdot U=0$, $N=\bar{x}_{vv}\cdot U=f''(4)/\sqrt5$

Επίσης $E=f^2(4)=1$, $F=0$, $G=3$ $\quad$ Τότε (σελ 93 Τόμος 5.10)

$$[S]=\begin{bmatrix}-3/\sqrt5 & 0\\ 0 & f''(4)/\sqrt5\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{g}$$

Αφού $f''(4)=0 \Rightarrow k_1=-3/\sqrt5$, $k_2=0$. Άρα δεν υπάρχει $\bar{w}$ ώστε $k(w)=3$ αφού $k_2=\max k(\bar{v})$.

Ζ) Εργαζόμενοι στη γενική θέση (u,v) υπολογίζουμε:

$E=f^2(v)$, $F=0$, $G=1+f'^2(v)$, $L=-f(v)/\sqrt{1+f'^2(v)}$, $M=0$, $N=\frac{f''(v)}{\sqrt{1+f'^2(v)}}$

$$[S]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{f(v)\sqrt{1+f'^2(v)}} & \frac{f''(v)}{(1+f'^2(v))^{3/2}}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad K=-\frac{f''(v)}{f(v)(1+f'^2(v))^2}$$

$$H=\frac{f''(v)f(v)-f'^2(v)-1}{2f(v)(1+f'^2(v))^{3/2}}.$$

Τότε

α) αν στο v_0 η f έχει τοπικό μέγιστο: $f'(v_0)=0$, $f''(v_0)<0$
$\Rightarrow K = -\frac{f''(v_0)}{f(v_0)} > 0 \Rightarrow$ το σημείο είναι ελλειπτικό

β) αν στο v_0 η f έχει τοπικό ελάχιστο: $f'(v_0)=0$, $f''(v_0)>0$
$\Rightarrow K < 0 \Rightarrow$ το σημείο είναι υπερβολικό

γ) αν στο v_0 η f έχει σημείο καμπής ($f''(v_0)=0$)
$\Rightarrow K = 0$ (παραβολικό ή επιπεδικό). Από τον πίνακα [S] όμως προκύπτει ότι $k_1 = 0$, $k_2 = -\frac{1}{f(v)\sqrt{1+f'^2(v)}} < 0$.
άρα το σημείο είναι παραβολικό