



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Πολυτεχνειούπολη-Ζωγράφου

ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ. : 77 21 744

FAX : 77 21 775

Ανάλυση Χρονοσειρών
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2009
ΣΕΜΦΕ

$$\rho(h) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma^2} = \frac{1}{2} \quad |h| < 1$$

ARET

Ζήτημα 1°. (Mov. 2)

Δίνεται η μηδενικού μέσου χρονοσειρά $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ με $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση διασποράς αυτής και να εξετάσετε για ποιες τιμές του ϕ είναι στάσιμη. (Mov. 2)

Ζήτημα 2°. (Mov. 3)

$$|\phi| < 1 \quad \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

(α) Να δοθεί ο ορισμός της αιτιατότητας μιας χρονοσειράς $\{X_t\}$, ($t \in \mathbb{Z}$), σε σχέση με τον λευκό θόρυβο $\{Z_t\}$, ($t \in \mathbb{Z}$).

(β) Να αποδείξετε ότι εάν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου μιας αυτοπαλινδρομικής χρονοσειράς είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου τότε είναι αιτιατή.

(γ) Ποια η διαφορά μεταξύ στάσιμότητας και αιτιατότητας.

(δ) Να εξεταστούν ως προς την αιτιατότητα οι παρακάτω χρονοσειρές:

(i) $X_t + 1.6X_{t-1} = Z_t - 0.4Z_{t-1} + 0.4Z_{t-2}$ (ii) $X_t + 1.8X_{t-1} - 0.81X_{t-2} = Z_t$.

OXI

NAI

coo + aret t

Ζήτημα 3°. (Mov. 3)

Έστω $\{X_t\}$ στάσιμη χρονοσειρά μηδενικού μέσου και με συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης $\gamma(h)$, $h=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Να δείξετε ότι η βέλτιστη, ως προς το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, γραμμική πρόβλεψη h βημάτων μπροστά

$$P_{\mathcal{H}_n} X_{n+h} = \Phi_n^{(h)} X_n + \dots + \Phi_m^{(h)} X_1$$

με $\mathcal{H}_n = \overline{sp}\{X_1, \dots, X_n\}$, προκύπτει από τη λύση του συστήματος

$$\Gamma_n \Phi_n^{(h)} = \gamma_n^{(h)},$$

όπου $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^n$ και $\gamma_n^{(h)} = (\gamma(h), \gamma(h+1), \dots, \gamma(n+h-1))^T$.

Ζήτημα 4°. (Mov. 2)

Έστω $X_t = \mu + Z_t + \theta Z_{t-1}$, όπου $\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$. Να προσδιοριστεί η $E[\bar{X}_n]$ και η $Var[\bar{X}_n]$, όπου $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$. Να κατασκευάσετε ένα 0.95-Δ.Ε. του μ . $\gamma=1-\alpha \Rightarrow \alpha=0.05$

$$\begin{aligned} -\bar{X}_n - t^* &< \mu < \bar{X}_n + t^* \\ \bar{X}_n - t^* &< \mu < \bar{X}_n + t^* \\ \bar{X}_n - t^* &< \mu < t^* \sqrt{n} + \bar{X}_n \\ j = i + h & \quad Z_{t-j}, Z_{t-j} \end{aligned}$$

Διάρκεια εξέτασης: 2½ h.

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &\sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1) \\ -t^* &< \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < t^* \quad 0.0025 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$