

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ (ΙΟΥΛΙΟΣ 2009)

Θέμα 1. (α) Έστω $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f = u + iv$ με $u = Re f$, $v = Im f$ και $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Αν ηf είναι παραγωγίσημη στο z_0 δείξτε ότι

- (1) $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$.
- (2) $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ και $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$.

(β) Έστω $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ σταθεροί μηχανικοί αριθμοί και $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(x + iy) = ax + by$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν ηf είναι ολόμορφη στο \mathbb{C} , δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = cz$.

Θέμα 2. (α) Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ακέραια συνάρτηση.

- (1) Δείξτε ότι για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \max\{|f(z)| : z \in C(z_0, R)\}$$

- (2) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(z)| \leq |z|^k$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

- (i) Δείξτε ότι για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} (|z_0| + R)^k$$

- (ii) Δείξτε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $n > k$, $f^{(n)}(z) = 0$. $R >>$

- (iii) Δείξτε ότι ηf είναι πολύωνυμο βαθμού το πολύ k .

(β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{C_R} \frac{e^z}{z^2 - 3z + 2} dz$$

όπου C_R ο κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας (i) $R = 3/2$ και (ii) $R = 3$.

Θέμα 3. (α) Δίνεται η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$

- (1) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει στην συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$.

- (2) Δείξτε ότι η σειρά αποκλίνει αν $|z| \geq 1$.

- (3) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο κέντρου 0 και ακτίνας $0 < R < 1$.

(β) Αναπτύξτε σε σειρά Laurent την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

σε καθένα από τους παρακάτω διακτύλιους (i) $1 < |z| < 2$, (ii) $|z| > 2$.

Θέμα 4. (α) Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ακέραια συνάρτηση, $w_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ και έστω $D = D(w_0, R)$ ο ανοικτός δίσκος κέντρου w_0 και ακτίνας R .

- (1) Αν για όλα τα $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $f(z) \in D$, δείξτε ότι ηf είναι σταθερή.

- (2) Ομοίως αν για όλα τα $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $f(z) \notin D$, δείξτε ότι πάλι ηf είναι σταθερή.

- (3) Δείξτε ότι αν μια ακέραια συνάρτηση f είναι μη σταθερή τότε η εικόνα της είναι πυκνή στο \mathbb{C} (δηλ. $\forall \epsilon > 0$ και $\forall w \in \mathbb{C}$ υπάρχει $z \in \mathbb{C}$ με $|f(z) - w| < \epsilon$).

(β) Δίνονται δύο ολόμορφες συναρτήσεις f, g ορισμένες στον ανοικτό δίσκο $D_0 = D(0, 1)$ κέντρου 0 και ακτίνας 1. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $z \in D_0$ ισχύει ότι $f(z)g(z) = 0$. Δείξτε ότι είτε $f = 0$ ή $g = 0$.