

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ/2^ο Εξάμηνο

26-6-2008

Να απαντήσετε σε ερωτήματα με άθροισμα μονάδων 10

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι ορθογώνιος, να αποδείξετε ότι:

(α) $|x^T Ax| \leq 1$, για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$. *Μονάδες 1*

(β) Ο πίνακας $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ είναι αντισυμμετρικός *Μονάδες 1*

ΘΕΜΑ 2^ο

(α) Να αποδείξετε ότι δύο όμοιοι πίνακες A και B έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές. *Μονάδες 1*

(β) Οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές.

Είναι όμοιοι; (Να εξηγήσετε την απάντησή σας). *Μονάδες 1*

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \kappa \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(i) Να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A και την αντίστοιχη κανονική μορφή Jordan αυτού για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$. *Μονάδες 1*

(ii) Για $\kappa = 2$, να προσδιορίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε $P^{-1}AP = D$, όπου D διαγώνιος πίνακας. Ποιος είναι ο πίνακας D ; *Μονάδες 1*

(iii) Για $\kappa = 2$ να εκφράσετε τον πίνακα A^n ως πρωτοβάθμιο πολυώνυμο του A . *Μονάδες 1*

(iv) Για $\kappa = 2$ να προσδιορίσετε τον πίνακα $\exp tA$, $t \in \mathbb{R}$. *Μονάδες 1*

ΘΕΜΑ 4^ο

(α) Για κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $H = I - \frac{2}{\|u\|^2} uu^T$ είναι

συμμετρικός και ορθογώνιος.

Μονάδες 1

(β) Αν $v \in \text{span}\{u\}^\perp$, να αποδείξετε ότι :

$$Hv = v \text{ και } Hu = -u.$$

Μονάδες 1

(γ) Βρείτε ορθογώνιο πίνακα M και διαγώνιο πίνακα D έτσι ώστε $M^T H M = D$.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 5^ο

Αν η τετραγωνική μορφή $Q(x) = x^T A x$ είναι ορισμένη (θετικά ή αρνητικά) να αποδείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Μονάδες 1

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Καλή επιτυχία