

1) (α) Για ποιας τιμής της ενέργειας E , μεγάλιτηρος του γηραιού δυναμικού ως μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συναρτηση κατανομής Fermi - Dirac με την έκφραση $\exp[-(E-\mu)/kT]$ με σφάλμα 5% Δώστε την απάντηση σε μονάδες kT

(β) Θεωρήστε το αισθητόμενό μέριο των θερμηφάσης ηλεκτρονίων. Πόσο μεγάλητηρη θα ξεπερνεί τον ποσονότητο καταστάσεων για ενέργεια $2kT$ πάνω από την ενέργεια με συγκριτικά με την πικενότητα καταστάσεων για ενέργεια $2kT$ κάτω από την ενέργεια με ώστε να υπάρχει η ίδια πικενότητα κατεντημένων καταστάσεων σ' αυτές τις δύο ενέργειες;

$$\text{a) } \frac{\Delta f}{f} = \frac{e^{-\beta(E+\mu)} - \frac{1}{e^{\beta(E+\mu)+1}}}{e^{\beta(E+\mu)+1}} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

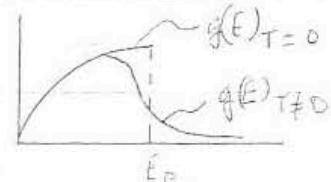
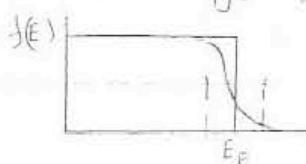
$$\therefore \frac{\Delta f}{f} = \frac{(e^{-\beta(E+\mu)} (e^{\beta(E+\mu)+1}) - 1)}{1 + e^{-\beta(E+\mu)} - 1} = e^{-\beta(E+\mu)} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Άρα: } e^{-\beta(E+\mu)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \beta(E+\mu) = \ln 20$$

$$(E+\mu) = (\ln 20) kT \approx 3.0 kT$$

$$\text{b) } dn(E) = 2g(E)f(E)dE$$



$$\text{Ζωνω } f_{E_F} dn(\mu+2kT) = dn(\mu-2kT)$$

$$2g(\mu+2kT)f(\mu+2kT)dE = 2g(\mu-2kT)f(\mu-2kT)dE$$

$$\frac{g(f+2kT)}{g(f-kT)} = \frac{f(f-2kT)}{f(f+kT)} = \left(\frac{e^{(f+2kT-f)kT} + 1}{e^{(f-kT-f)kT} + 1} \right)$$

$$= \frac{e^2 + 1}{e^{-2} + 1}$$

2)

$$a) \frac{\partial f_o(E)}{\partial E} = -\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \right) = -\frac{\beta e^{\beta(E-\mu)}}{(e^{\beta(E-\mu)} + 1)^2}$$

$$= -\beta \left(\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \right) \left(\frac{e^{\beta(E-\mu)}}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \right)$$

$$= -\beta f_o(E) (1 - f_o(E))$$

$$\therefore \frac{\partial f_o(E)}{\partial E} = -\frac{1}{k_B T} f_o(E) (1 - f_o(E))$$

$$b) \frac{\partial f_o(E)}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \right) \frac{\partial \beta}{\partial T}$$

$$= -\frac{\beta(E-\mu)}{(e^{\beta(E-\mu)} + 1)^2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{E-\mu}{kT} \right)$$

$$= \left(\frac{\beta(E-\mu)}{(e^{\beta(E-\mu)} + 1)^2} \right) \left[-\frac{1}{T^2} \frac{E-\mu}{k} + \frac{1}{kT} \frac{\partial}{\partial T}(E-\mu) \right]$$

$$= kT \left(\frac{\partial f_o(E)}{\partial E} \right) \left(\frac{1}{kT} \right) \left[\frac{E-\mu}{T} - \frac{\partial(E-\mu)}{\partial T} \right]$$

$$= \left(-\frac{\partial f_o(E)}{\partial E} \right) \left[\frac{E-\mu}{T} - \frac{\partial(E-\mu)}{\partial T} \right]$$

$$\therefore \frac{\partial f_o(E)}{\partial T} = \left(-\frac{\partial f_o(E)}{\partial E} \right) \left[\frac{E-\mu}{T} - \frac{\partial(E-\mu)}{\partial T} \right]$$

(2)

3) Να δείξετε ότι για ένα αερίο Καλενθέρων της εκτροφίαν μέσα σε τρισδιάστατο κουτί σε απόλυτο μηδέν ($T = 0K$):

(α) Η εσωτερική του ενέργεια είναι $U_0 = 3/5 N E_F$.

(β) Ισχύει η σχέση $pV = 2/5 N E_F$, όπου $p = -(\partial U / \partial V)_N$ δίνει τη πίεση.

a) Τα γενικά μηνύματα ικανών πινακών είναι

$$U = 2V \int E g(E) f(E) dE ,$$

$$\text{έπειο } 2g(E) = \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{3/2} \quad \text{για } 3-D$$

$$\text{"Όπως } T=0K": \quad f(E) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 < E \leq E_F \\ 0 & \text{για } E > E_F \end{cases}$$

Άρα για $T=0K$:

$$\begin{aligned} U(T=0K) = U_0 &= 2V \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{E_F} E^{3/2} dE \\ &= \frac{2V}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{5} E_F^{5/2} \end{aligned}$$

$$\text{Γνωστήτε όμως ότι: } N(T) = N(T=0) = N$$

$$N = 2V \int g(E) f(E) g(E) dE = 2V \int_0^{E_F} g(E) dE$$

$$= \frac{2V}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} E_F^{3/2}$$

$$\text{Άρα: } \boxed{U_0 = \frac{3}{5} N E_F}$$

$$\text{b) } p = -\frac{\partial U}{\partial V}_N$$

$$p_0 = -\frac{\partial U_0}{\partial V}_N$$

(1)

If V_0 depends only on the V (i) consider
the (ii) follows the E_F .

$$\text{For } T=0K: N = \frac{2V}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Again: } E_F = \left(\frac{3\pi^2}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore E_F = \left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Again: } V_0 = \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{5} V \left[\left(\frac{3\pi^2}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{5} (3\pi^2)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{5}{2}} N^{\frac{5}{3}} V V^{-\frac{5}{3}}$$

$$= \frac{4}{5} \frac{3\pi^2 (3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{4\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} N^{\frac{5}{3}} V^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{3}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} N^{\frac{5}{3}}\right) V^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{Again: } p = - \left. \frac{\partial V_0}{\partial V} \right|_V = - \left(\frac{3}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} N^{\frac{5}{3}} \right) \left(-\frac{2}{3} V^{-\frac{5}{3}} \right)$$

$$= \frac{2}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} N^{\frac{5}{3}} V^{-\frac{2}{3}} V^{-1}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} N^{\frac{5}{3}} V^{-\frac{2}{3}} \right) V^{-1}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{V_0}{V}$$

$$P = \frac{2}{3} \frac{V_0}{V}$$

$$P = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{5} N E_F \right) \frac{1}{V} \Rightarrow$$

$$PV = \frac{2}{3} N E_F$$

(4)

4) Σε ένα δείγμα με όγκο V και αριθμό πλακτρονίων N , η πυκνότητα καταστάσεων των πλακτρονίων, $g(E)$, δίνεται από τη σχέση $g(E) = g_0$ για $E > 0$ και $g(E) = 0$ για $E < 0$, οπου g_0 είναι μία σταθερή ποσότητα. (a) Να υπολογίσετε την ενέργεια Fermi, E_F . (β) Να υπολογίσετε την ολική ενέργεια των πλακτρονίων, κυθώς και την ειδική θερμότητα για πάλι χυμητής θερμοκρασίας.

a)

$$n = \frac{N}{V} = 2 \int_{-\infty}^{E_F} g(E) dE = 2 g_0 \int_0^{E_F} dE = 2 g_0 E_F \quad (1)$$

$$\therefore n = 2 g_0 E_F$$

$$E_F = \frac{n}{2 g_0} = \frac{N}{2 V g_0}$$

b) Όμως η δερματοστάσια είναι πολύ χαμηλή, το σύστημα είναι ευρυπλατό (η κατανομή πάλι στην ιδιότητα).

Χαμηλή δερματοστάσια: $kT \ll \mu(T)$.

Η $f(E)$ είναι: $\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \quad (f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1})$

$$n = \frac{N}{V} = 2 \int_{0}^{\infty} g_0 f(E) dE.$$

Με να ανάλογαρχα τον Sommerfeld:

$$\int_0^{\infty} H(E) f(E) dE = \int_0^{\mu} H(E) dE + \frac{1}{6} (\ln T)^2 \left. \frac{dH}{dE} \right|_{\mu} + \dots$$

(5)

$$\text{Für } H(E) = 2g_0 \quad \frac{dH}{dE} = 0.$$

Aus:

$$n = \frac{N}{V} = 2g_0 \left[\int_0^{\mu(T)} dE + \frac{n^2}{6} (\mu(T))^2 \cdot 0 + \dots \right] = 2g_0 \mu(T).$$

$$\therefore n = \frac{N}{V} = 2g_0 \mu(T) \quad \text{zu } \mu(T) = \frac{N}{2Vg_0}$$

Der innere Energieanteil ist: U .

$$U = \int_0^{\infty} 2g_0 V E f(E) dE = 2Vg_0 \int_0^{\infty} E f(E) dE$$

Typ: 670 eV im Bereich des Bänderfeldes:

$$f(E) = 1, \quad \frac{dH(E)}{dE} = 1$$

Aus: $U = 2Vg_0 \left\{ \int_0^{\mu} E dE + \frac{n^2}{6} (\mu(T))^2 \right\}$

$$= 2Vg_0 \left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{n^2}{6} Vg_0 (\mu(T))^2 \right)$$

$$\therefore U = Vg_0 \mu^2(T) + \frac{n^2}{3} Vg_0 (\mu(T))^2$$

Erläutern wir nun C_V .

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = \frac{2}{3} n^2 V g_0 k^2 T = \frac{n^2}{3} N \frac{k^2 T}{\mu(T)}$$

$$C_V = \frac{2}{3} n^2 V g_0 k^2 T = \frac{n^2}{3} N \frac{k^2 T^2}{\mu(T)}$$

Bei $kT \ll \mu$, $\mu \approx E_F \rightarrow C_V \approx \left(\frac{n^2}{3} N \frac{k^2}{E_F} \right) T$

①

5) Πρόβλημα 3.12 από το βιβλίο «ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΕΡΕΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ» του Σ. Παπαδόπουλου

Πλανητικό Fermi με ελεύθερη φυσική ($T=0K$) και σταθ.

i) η μέση υψης των ταχυτήσεων $\langle v \rangle$

ii) μέση των ρυθμών περιστροφής (τ_{rot}) των πλανητών $\sqrt{\tau}$

iii) η πόση υψης των ανισορροπιών των ταχυτήσεων $\langle \frac{v}{n} \rangle$

Επηργατική διάταξη αποτελείται από τρία ταχύτητες
Fermi $v_F = (2E_F)^{1/2}$

$$(i) \langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v dN = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v E/2g(E)f(E)dE$$

Όταν $T=0K$:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{E_F} v(E) 2V \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} E^{1/2} dE$$

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v(E) = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\text{Άριστη: } \langle v \rangle = \frac{1}{N} \frac{2V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \int_0^{E_F} E dE$$

$$= \frac{2V}{N} \frac{m}{\hbar^2 h^3} \int_0^{E_F} E dE = \frac{2V}{N} \frac{m}{\hbar^2 h^3} \frac{E_F^2}{2}$$

$$\text{Άριστη: } \langle v \rangle_{T=0} = \frac{V}{N} \frac{m}{\hbar^2 h^3} E_F^2$$

$$\text{Όπως: } E_F = \frac{1}{2} m v_F^2 = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \Rightarrow [k_F = n]$$

$$\Rightarrow \langle v \rangle_{T=0} = \frac{V}{N} \frac{m}{\hbar^2 h^3} \frac{1}{4} m^2 v_F^4 = \frac{V}{N} \frac{m^3}{4\hbar^2 h^3} v_F^4$$

$$\text{Ενώ: } k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \text{ (είναι στερεά)}$$

$$\therefore n = \frac{N}{V} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} = \frac{m^3 v_F^3}{\hbar^3 3\pi^2}$$

(2)

$$A_{\text{par}} \langle v \rangle_{T=0} = \frac{3\pi^2 \hbar^3}{m^3 v_F^3} \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^3} v_F^{-4} = \frac{3}{4} v_F$$

$$\boxed{\langle v \rangle_{T=0} = \frac{3}{4} v_F}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \langle v^2 \rangle_{T=0} &= \frac{1}{N} \int_0^{E_F} v^2(E) \frac{2V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} dE \\ &= \frac{1}{N} \int_0^{E_F} \frac{2E}{m} \frac{2V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} dE \\ &= \frac{V}{N} \frac{4}{m(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{E_F} E^{5/2} dE \\ &= \frac{1}{N} \frac{4}{m(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{5} E_F^{5/2} \\ &= \frac{3\pi^2 \hbar^3}{m^3 v_F^3} \frac{4}{m(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} M\right)^{5/2} v_F^5 \\ &= \frac{3}{5} v_F^2. \end{aligned}$$

$$A_{\text{par}}: \boxed{\sqrt{\langle v^2 \rangle_{T=0}} = \sqrt{\frac{3}{5} v_F^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \langle \frac{1}{v} \rangle_{T=0} &= \frac{1}{N} \int_0^{E_F} \frac{1}{v(E)} \frac{2V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} dE \\ &= \frac{V}{N} \frac{2}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{1}{(2)} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE \\ &= \frac{V}{N} \frac{2}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \int_0^{E_F} dE \\ &= \frac{3\pi^2 \hbar^3}{m^3 v_F^3} \frac{2}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} E_F \\ &= \frac{3\pi^2 \hbar^3}{m^3 v_F^3} \frac{2}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2} m v_F^2 \\ &= \frac{3}{2} v_F \end{aligned}$$

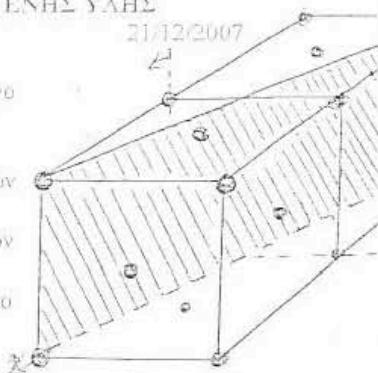
$$\boxed{\langle \frac{1}{v} \rangle_{T=0} = \frac{3}{2} v_F}$$

ΦΥΣΙΚΗ ΣΥΜΠΥΚΝΩΜΕΝΗΣ ΥΔΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (2)

6) Το σχήμα διδάσκει ένα επίπεδο σε δύο εδρικούντραιμένο κυβικό πλέγμα (τες).

- (α) Να βρείτε τους δείκτες Miller ανάμεσα των επιπέδων
- (β) Να βρείτε τις υποστάσεις μεταξύ διαδοχικών επιπέδων και να σχδιάστε το διαδοχικό επίπεδο.
- (γ) Να βρείτε την προνότητα των πλεγματικών σημείων στο επίπεδο αυτό
- (δ) Ποια θα ήταν η απάντηση στο ερώτημα (β) εάν το πλέγμα ήταν απλό κυβικό;



a) $\bar{\Sigma}_{20 \text{ sc}} (120)$

$$\bar{\Sigma}_{20 \text{ sc}} \vec{R} = \frac{2\pi}{a} [(u_1 + u_2 + u_3)\vec{x} + (u_1 u_2 - u_3)\vec{y} + (-u_1 u_2 - u_1 u_3)\vec{z}]$$

$$(\bar{b}_1 = \frac{10}{a} (\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}), \bar{b}_2 = \frac{20}{a} (-\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}), \bar{b}_3 = \frac{30}{a} (\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}))$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = \alpha \\ u_1 u_2 - u_3 = 2\alpha \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = \alpha \\ u_1 u_2 - u_1 u_3 = 2\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = \alpha \\ u_1 u_2 - u_1 u_3 = 2\alpha \end{cases}$$

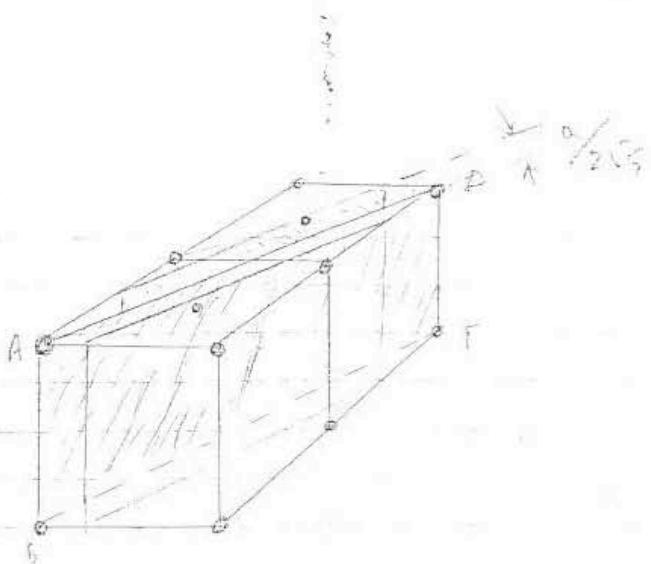
$$\therefore \begin{cases} 2u_1 = 3\alpha \\ 2u_2 = 2\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = 2 \end{cases} \quad \text{and } u_3 = u_1 - u_2 = 3 - 2 = 1$$

Άρα: $\bar{\Sigma}_{20 \text{ sc}} \approx \bar{\Sigma}_{111}$ (321)_{tc}

$$\text{i)} \quad \vec{R} = 3\bar{b}_1^2 + 2\bar{b}_2^2 + \bar{b}_3^2 = \frac{2\pi}{a} [3\vec{x}^2 + 2\vec{y}^2 - 3\vec{z}^2 - 2\vec{x} + 2\vec{y} + 2\vec{z} + \vec{x}] = \frac{2\pi}{a} [2\vec{x} + 4\vec{y}] = \frac{4\pi}{a} (\vec{x} + 2\vec{y})$$

Άρα: $|\vec{R}| = \frac{4\pi}{a} \sqrt{5}$

$$\tan \phi = \frac{2\pi}{|\vec{R}|} = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$



8) To calculate the axial force of member AB in

$$a = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

using negative strain energy approach

strains in members AB, BC

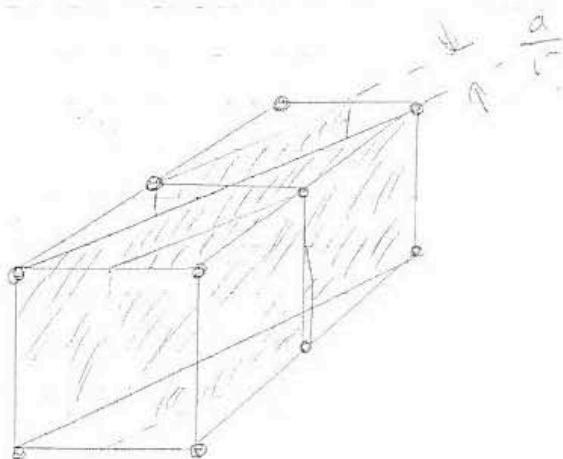
Area of the triangle ABC.

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}a}$$

$$\delta) R_x = \frac{\pi}{a} (R + R)$$

$$|\vec{k}_x| = \frac{\pi}{a} \sqrt{5}$$

$$d = \frac{\pi}{|\vec{k}_x|} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$



7) Δίνεται το επίπεδο (110) στο εδροκεντρωμένο κυβικό πλέγμα (fcc).

(α) Ποιοι είναι οι δείκτες Miller αυτού του επιπέδου ως προς ένα απλό κυβικό πλέγμα (sc) και ως προς ένα χωροκεντρωμένο κυβικό πλέγμα (bcc);

(β) Να βρείτε τις αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών επιπέδων και να σχεδιάσετε το διαδοχικό επίπεδο για τις περιπτώσεις που το πλέγμα είναι

(i) απλό κυβικό, (sc),

(ii) εδροκεντρωμένο κυβικό (fcc)

(iii) χωροκεντρωμένο κυβικό (bcc)

fcc:

$$\vec{a} = \frac{a}{2}(x+y), \quad \vec{b} = \frac{a}{2}(y+z), \quad \vec{c} = \frac{a}{2}(z+x)$$

$$\vec{a}^* = \frac{2n}{a}(x+y-\frac{1}{2}), \quad \vec{b}^* = \frac{2n}{a}(-x+y+\frac{1}{2}), \quad \vec{c}^* = \frac{2n}{a}(x-y)$$

$$\vec{G}_{(110)} = n_1 \vec{a}^* + n_2 \vec{b}^* + n_3 \vec{c}^* = \frac{2n}{a} \left[(n_1 - n_2 + n_3)x + (n_1 + n_2 - n_3)y + (-n_1 + n_2 + n_3)z \right]$$

$$(110)_{sc} = \vec{G}_{(110)_{sc}} = \vec{a}^* + \vec{b}^* = \frac{2n}{a}(x+y-\frac{1}{2}-x+y+\frac{1}{2})$$

$$= \frac{2n}{a}2y = \frac{4n}{a}y$$

$$A_{sc}, (110)_{sc} \Rightarrow (010)_{sc}$$

Σ_{20} bcc:

$$\vec{a} = \frac{a}{2}(x+y-\frac{1}{2}), \quad \vec{b} = \frac{a}{2}(-x+y+\frac{1}{2}), \quad \vec{c} = \frac{a}{2}(x-y)$$

$$\vec{a}^* = \frac{2n}{a}(x+y), \quad \vec{b}^* = \frac{2n}{a}(y+z), \quad \vec{c}^* = \frac{2n}{a}(z+x)$$

$$\vec{G}_{bcc} = n_1 \vec{a}^* + n_2 \vec{b}^* + n_3 \vec{c}^*$$

$$= \frac{2n}{a} \left[(n_1 + n_3)x + (n_1 + n_2)y + (n_2 + n_3)z \right]$$

$$\begin{aligned} n_1 + n_3 &= 0 & n_3 &= -n_1 \\ n_1 + n_2 &= \alpha & n_2 &= n_1 \\ n_2 + n_3 &= 0 & n_3 &= -n_2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2n_1 = \alpha \\ n_1 = n_2 = \frac{\alpha}{2} \\ n_3 = -n_2 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = n_2 = 1 \\ n_3 = -1 \end{array} \right\}$$

A₁a, c₁ bcc, 20 transversen (111)

$$\vec{G}_{\text{bcc}} = \vec{a}^* + \vec{b}^* - \vec{c}^* = \frac{2\pi}{a} (x+y+z+x-y) \\ = \frac{4\pi}{a} y$$

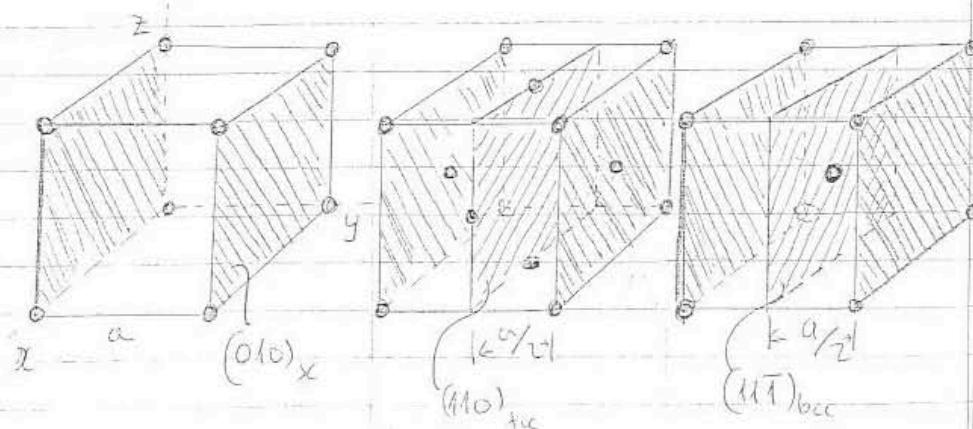
(100)_{fcc} \Leftrightarrow (010)_{bcc} \Leftrightarrow (111)_{bcc}

b) sc fcc bcc

$$\vec{G}_{(010)_{sc}} = \frac{2\pi}{a} y \quad \vec{G}_{(110)_{sc}} = \frac{4\pi}{a} y \quad \vec{G}_{(111)_{sc}} = \frac{4\pi}{a} y$$

$$|\vec{G}_{(010)_{sc}}| = \frac{2\pi}{a}, \quad |\vec{G}_{(110)_{sc}}| = \frac{4\pi}{a}, \quad |\vec{G}_{(111)_{sc}}| = \frac{4\pi}{a}$$

$$d = \frac{2\pi}{|\vec{G}_{(010)_{sc}}|} = a, \quad d = \frac{2\pi}{|\vec{G}_{(110)_{sc}}|} = \frac{a}{2}, \quad d = \frac{2\pi}{|\vec{G}_{(111)_{sc}}|} = \frac{a}{2}$$



8) Πρόβλημα 2.22 από το βιβλίο «ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΕΡΕΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ» του Σ.

Παπαδόπουλου

2.22 Ως θεμέλια δη διανύσματα μετατόπισης των εξαγωνικού πλέγματος, θεωρείστε τα

$$\mathbf{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{a}{2}\hat{y}, \quad \mathbf{b} = -\frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{a}{2}\hat{y}, \quad \mathbf{c} = a\hat{z}$$

και διλέξτε ότι:

$$(i) \text{ Ο όγκος } V \text{ της θεμέλιας κινητής πλέγματος είναι } \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 c$$

(ii) Τα θεμέλια δη διανύσματα των αντιστροφού πλέγματος είναι

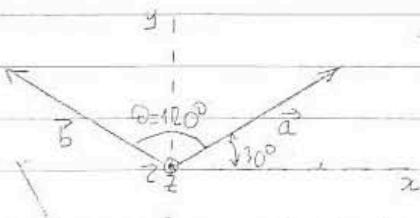
$$\mathbf{a}^* = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}\hat{x} + \frac{2\pi}{a}\hat{y}, \quad \mathbf{b}^* = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}\hat{x} + \frac{2\pi}{a}\hat{y}, \quad \mathbf{c}^* = \frac{2\pi}{c}\hat{z}$$

Σχεδιάστε το πλέγμα πώς ορίζονται τα διανύσματα αυτά και χαρακτηρίστε το. Τέλος,

(iii) Σχεδιάστε την πρώτη ζώνη Brillouin του εξαγωνικού πλέγματος. Εξηγείστε σύντομα πώς χαράξατε αυτήν.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{a}{2}\hat{y}\right) \times \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{a}{2}\hat{y}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \frac{a}{2} (\hat{x} + \hat{y}) \cdot -\frac{a\sqrt{3}}{2} \frac{a}{2} (\hat{x} + \hat{y}) \\ &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{a}{2} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{a}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

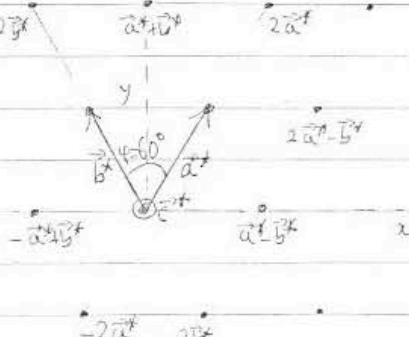
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \frac{a}{2} \cdot c \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 c \quad \boxed{V_c = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 c}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{a^2}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a^2 \cos 120^\circ$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$



Kάτοφη (crossing of axes)

Εγγύηση ηλίθια.

Η γενική σχέση με $\vec{a}^* \times \vec{b}^*$

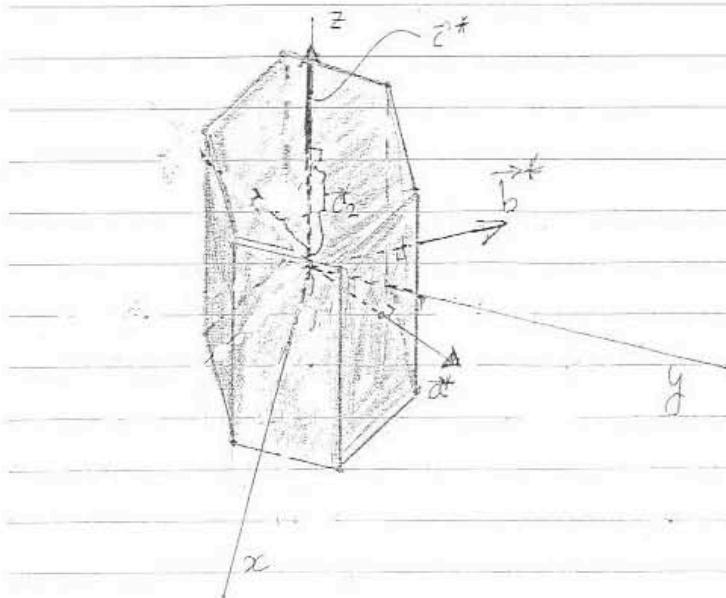
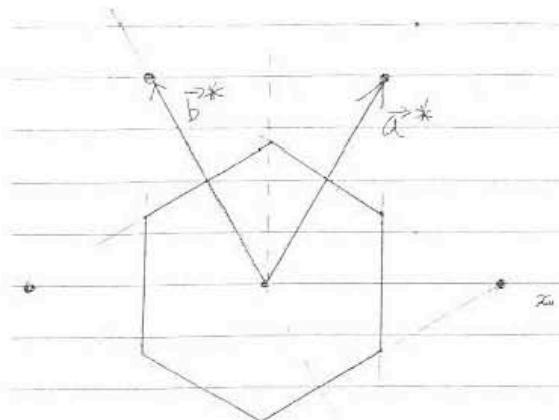
είναι 60° :

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b}^* = \frac{4a^2}{a^2} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{4a^2}{a^2} \frac{2}{3}$$

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b}^* = |\vec{a}^*| |\vec{b}^*| \cos \varphi = \frac{4a^2}{a^2} \frac{4}{3} \cos$$

$$\therefore \cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = 60^\circ}$$

Zeichnung eines fiktiven Brillenlinsenmodells (x,y)



9) Ακτίνες χ με μηκούς κυμάτων λ προσπίπτουν σε εργαστήριο με χωροκεντρώματα κυβικό πλέγμα (bcc) με κατεύθυνση $[1 \ 0 \ 0]$ και ιφιστανται έντονη σκέψη Bragg (συμβολή πρώτης τάξης) στην κατεύθυνση $[0 \ 1 \ 0]$. Οι δείκτες Miller δίνονται ως προς το απλό κυβικό πλέγμα (sc).

(a) Από ποια οικογένεια επιπέδων γίνεται η σκέψη; Να βρείτε τους δείκτες Miller αυτών των επιπέδων ως προς το απλό κυβικό πλέγμα (sc) και ως προς το χωροκεντρώματα κυβικό πλέγμα (bcc). Να σχεδιάστε ένα τέτοιο επίπεδο. (f Ποια είναι η υπόστια μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων που βρίσκεται στο (a); (g) Ποια είναι η απόσταση μεταξύ δύο πλησιέστερων γειτόνων στον εργαστήριο αυτό (συναρτήσει των λ);

$$\vec{E} = \alpha(-\vec{x}), \vec{E}' = \alpha(-\vec{y})$$

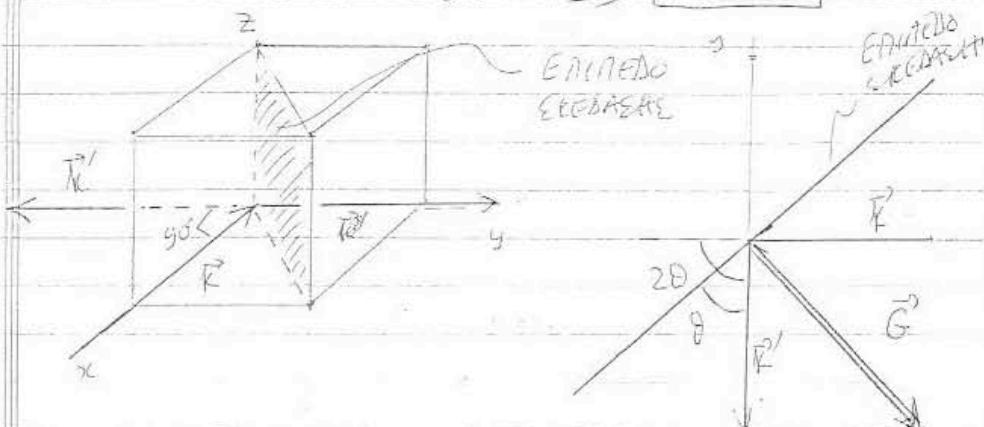
$$\text{Η γωνία } \alpha \text{ είναι γιατί } \vec{E} = \vec{E}' \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$|\vec{E} \cdot \vec{E}'| = |\vec{E}| |\vec{E}'| \cos 2\theta$$

$$(\alpha \vec{x}) \cdot (-\alpha \vec{y}) = (\alpha)(\alpha) \cos 120^\circ$$

$$0 = \alpha^2 \cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = 0$$

$$\therefore 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$



$$\sin \theta = 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ευθίαν Bragg : } n\lambda = 2d \sin \theta$$

$$n=1 \quad d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad \text{①} \quad \text{d: Ανάστριψη παραγάγοι}$$

Πλειονεύων συντελεστών Δ

A weiteren giebt es die 20 Gittervektoren des BCC
Körpers mit $\vec{G} = \vec{k}' - \vec{k}$

$$\vec{G} = \vec{k}' - \vec{k} = \alpha(-\hat{y} + \hat{x}) = \alpha(\hat{x} - \hat{y})$$

(Es ist zu erwähnen, dass diese Vektoren im $(110)_{SC}$

$$|\vec{G}| = \sqrt{2}\alpha \quad \text{mit } \alpha = d = \frac{2\pi}{\vec{k}'} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\alpha}$$

$$\therefore \boxed{d = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}} \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$\text{Also: } \vec{k} = -\frac{2\pi}{\lambda} \hat{x}, \quad \vec{k}' = -\frac{2\pi}{\lambda} \hat{y}$$

Also gilt $\vec{G} \propto (\hat{x} - \hat{y})$

$$\vec{G}_{BCC} = n_1 \vec{a}^* + n_2 \vec{b}^* + n_3 \vec{c}^*$$

$$\begin{aligned} &= n_1 \left(\frac{2\pi}{\lambda} (\hat{x} + \hat{y}) \right) + n_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} (\hat{y} + \hat{z}) \right) + n_3 \left(\frac{2\pi}{\lambda} (\hat{x} + \hat{z}) \right) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} [(n_1 + n_3) \hat{x} + (n_1 + n_2) \hat{y} + (n_2 + n_3) \hat{z}] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n_1 + n_3 = \alpha \\ n_1 + n_2 = -\alpha \\ n_2 + n_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n_3 - n_2 = 2\alpha \\ 2n_1 = 2\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} 2n_1 = 2\alpha \\ n_2 = -\alpha \\ n_1 = -\alpha - n_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{Also: } n_1 = 0, n_2 = -1, n_3 = 1 \\ &\Rightarrow \vec{G}_{BCC} = -\vec{b}^* + \vec{c}^* \Rightarrow (0\bar{1}\bar{1})_{BCC} \end{aligned}$$

$$\vec{G}_{BCC} = \frac{2\pi}{\lambda} [-\hat{y}; \hat{z} + \hat{x} + \hat{z}] = \frac{2\pi}{\lambda} (\hat{x} - \hat{y})$$

$$\text{Daher } \vec{k}' - \vec{k} = \lambda (\hat{x} - \hat{y}) = \frac{2\pi}{\lambda} (\hat{x} - \hat{y})$$

$$\text{Also: } \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{a = \lambda}$$

$$d = \frac{2\pi}{|\vec{G}_{bc}|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{a} \sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{d = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}}$$

Hinweis: ansonsten ist das $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda$$

10) Αιστίνες και μήκος κύματος των προσπίπτοντων σε κρύσταλλο με εδροκαντρομένο κυβικό πλέγμα (fcc) με κατεύθυνση $[\bar{1} \bar{1} 0]$ και υφίστανται έντονη σκέδαση Bragg (συμβαλλή πρωτης τιμής) στην κατεύθυνση $[\bar{1} 1 0]$. Οι διάκριτες Miller δίνονται ως προς το απλό κυβικό πλέγμα (sc).

(α) Από ποια οικογένεια επιπέδων γίνεται η σκέδαση; Να βρείται τους δείκτες Miller αυτών των επιπέδων ως προς το απλό κυβικό πλέγμα (sc) και ως προς το εδροκαντρομένο κυβικό πλέγμα (fcc). Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο επίπεδο. (β) Που είναι η υπόσταση μεταξύ δύο διάδοχων επιπέδων που βρήκατε στο (α); (γ) Που είναι η υπόσταση μεταξύ δύο πλησιστηριών γενιών στον κρύσταλλο από τον (συναρπήσει του λ);

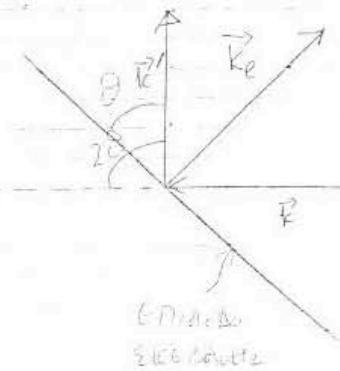
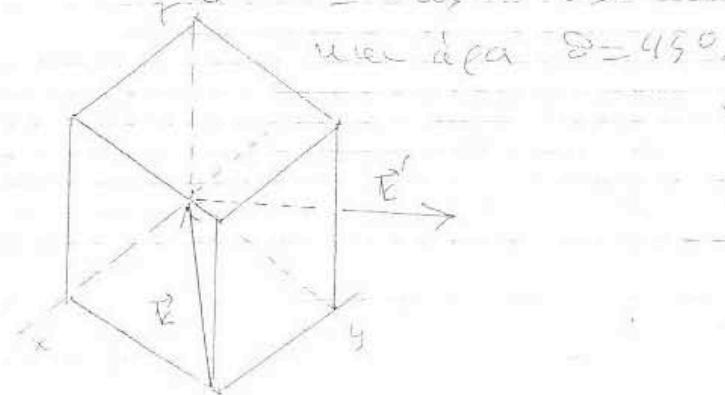
$$\text{προ τα. } \vec{a}_1 = \frac{a}{2} (\hat{x} \hat{y}), \vec{a}_2 = \frac{a}{2} (\hat{y} + \hat{z}), \vec{a}_3 = \frac{a}{2} (\hat{x} + \hat{z}) \\ \vec{b}_1 = \frac{2a}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}), \vec{b}_2 = \frac{2a}{\sqrt{2}} (-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}), \vec{b}_3 = \frac{2a}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y}) \\ \vec{R} = u_1 \vec{b}_1 + u_2 \vec{b}_2 + u_3 \vec{b}_3 \\ = \frac{2a}{\sqrt{2}} [(u_1 - u_2 + u_3) \hat{x} + (u_1 u_2 - u_3) \hat{y} + (-u_1 + u_2 + u_3) \hat{z}]$$

$$\vec{k} \propto -\hat{x} - \hat{y}, \quad \vec{k}' \propto -\hat{x} + \hat{y} \\ \vec{k} = -\alpha (\hat{x} + \hat{y}), \quad \vec{k}' = \alpha (-\hat{x} + \hat{y})$$

Είναι ίδια σύγχρονη. $|\vec{k}| = |\vec{k}'| \Rightarrow \alpha' = \alpha$.

$$\vec{k} \cdot \vec{k}' = |\vec{k}| |\vec{k}'| \cos 2\delta \\ -\alpha^2 (\hat{x} + \hat{y}) \cdot (-\hat{x} + \hat{y}) = (\sqrt{2}\alpha) (\sqrt{2}\alpha) \cos 2\delta \\ -\alpha^2 (-1 + 1) = 2\alpha^2 \cos 2\delta$$

$$0 = 2 \cos 2\delta \Rightarrow \cos 2\delta = 0 \Rightarrow 2\delta = 90^\circ$$



$$\sin \vartheta = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

zweiter Bragg: $n\lambda = 2d \sin \vartheta$

$$n=1 \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2 \sin \vartheta} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad \boxed{d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \quad (\text{A})$$

c: Anfangsvektoren des elektrischen Braggs
($\vec{R}_0 = 0$):

Ergebnisvektor nach 2. Schritt ist der Vektor

$$\rightarrow \vec{R}_e = \vec{k} - \vec{k} = \alpha (-\vec{x} + \vec{y} + \vec{x} + \vec{y}) = 2\vec{y} \\ (\lvert \vec{R}_e \rvert = 2x) \quad \boxed{\text{Ergebnis } (0, 2x)}$$

$$\text{und } d = \frac{2x}{\lvert \vec{R}_e \rvert} = \frac{x}{2} \quad \boxed{d = \frac{x}{2}} \quad (\text{B})$$

$$(\text{A}) = (\text{B}) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\sqrt{2}x}{\lambda}}$$

Aperturwinkel $\approx 10^\circ$ für FeCrO_3

$$\vec{k}: [\bar{1}\bar{1}0]_{sc} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (u_1+u_2+u_3) = -1 \\ 2Bu_1 = -2 \Rightarrow Bu_1 = 1 \\ Bu_1 + Bu_2 + Bu_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1 \\ u_2 = u_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2Bu_2 = 0 \\ 2Bu_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Aca: } \beta = \frac{1}{2}, u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$$

$$[\bar{1}\bar{1}0]_{sc} \rightarrow [\bar{2}\bar{1}\bar{1}]_{fc} \Rightarrow \vec{k} = \gamma(-2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 - \vec{b}_3) \quad |\vec{k}| = \gamma \frac{4\sqrt{2}}{2} \sqrt{2}$$

$$\vec{k}': [\bar{1}(10)]_{sc} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (u_1 - u_2 + u_3) = -1 \\ 2Bu_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \\ Bu_1 + Bu_2 - Bu_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_3 = -u_2 \\ 2Bu_2 = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = -1 \end{array} \right\} \quad \text{Kern } u_3 = -1 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) \rightarrow (0, 1, -1)$$

$$[\bar{1}(10)]_{sc} \rightarrow [0\perp\bar{1}]_{fc} \Rightarrow \vec{k}' = \gamma(\vec{b}_2 - \vec{b}_3) \quad |\vec{k}'| = \gamma \frac{4\sqrt{2}}{2} \sqrt{2}$$

$$\text{Aca: } \vec{R}_e = \vec{k}' - \vec{k} \approx \gamma(\vec{b}_2 - \vec{b}_3 + 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3) = 2\gamma(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)$$

To find the \vec{R}_e on the sum $(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)$ from
with $\gamma = \frac{1}{2}$. ($\vec{R}_e = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$)

$$|\vec{R}_e| = 4a \quad \text{G.} \quad \text{then } d = \frac{2n}{|\vec{R}_e|} = \frac{a}{2}$$

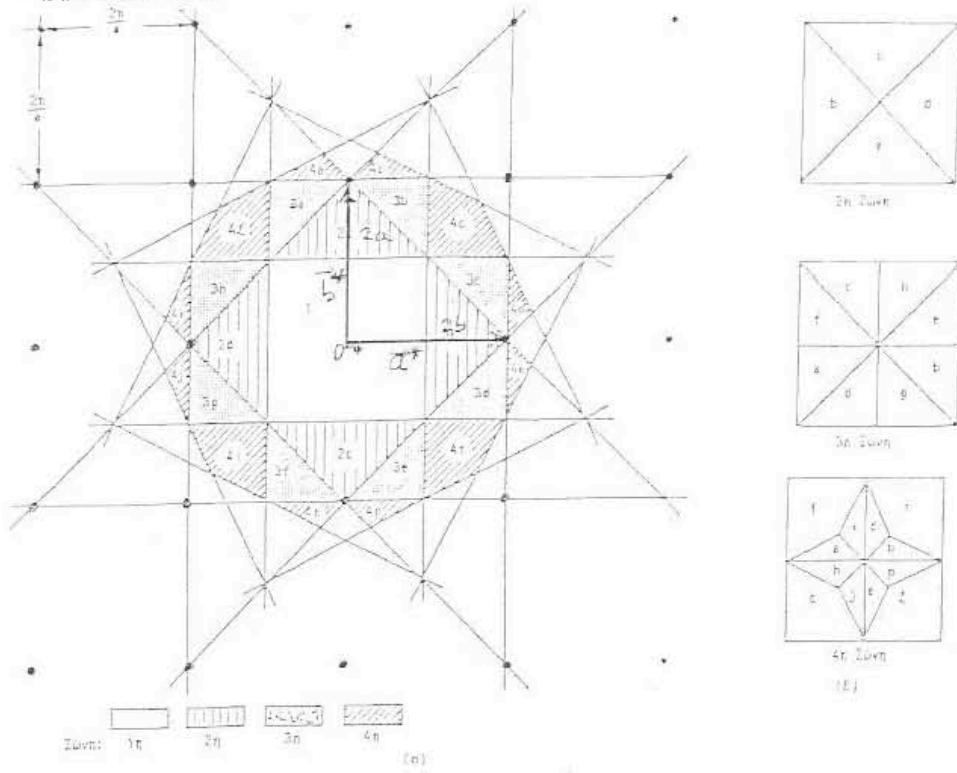
$$\text{And in (B): } |\vec{R}_e| = 2x \quad \text{A few } 2x = \frac{4n}{\lambda}$$

$$\text{then } x = \frac{2n}{a} \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{2n}{a} \\ x = \frac{\sqrt{2}n}{\lambda} \end{array} \right\} a = \sqrt{2}\lambda$$

$$\text{Ans (A) = (B)} \\ \text{Area A}$$

$$d = \frac{a}{2} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

11) Το Σχήμα (a) δείχνει τις πύρινες πρώτες ζώνες Brillouin για την τετράγωνη πλατιμά.
 $(\mathbf{a}^* = (2\pi/a)\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{b}^* = (2\pi/a)\hat{\mathbf{y}})$. Να βρείτε με ποια διανύσματα τοις αντιστρόφους Σλέμπιτσες
 $\mathbf{G} = m_1 \mathbf{a}^* + m_2 \mathbf{b}^*$, μετατοπιζόμενα το καθε τμήμα της 2ης, 3ης και 4ης ζώνης στο αντημένο
σχήμα (σχήμα (b))

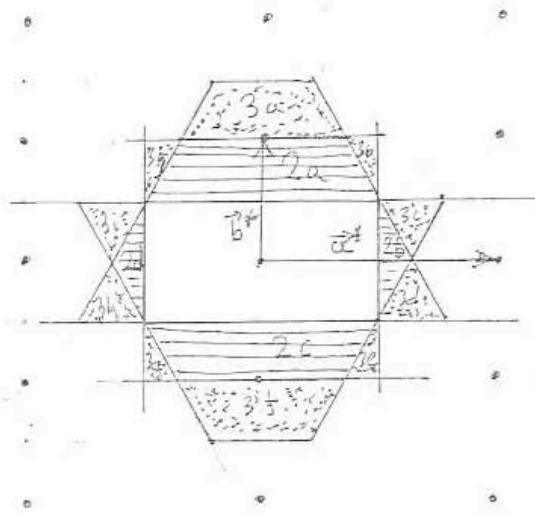


Meronómena κατά:	Meronómena κατά:	Meronómena κατά:
$2a$	$-\vec{b}^*$	$4a$
$2b$	$-\vec{a}^*$	$4b$
$2c$	$+\vec{b}^*$	$4c$
$2d$	\vec{a}^*	$4d$
		$4e$
	$3a$	$4f$
	$3b$	$4g$
	$3c$	$4h$
	$3d$	$4i$
	$3e$	$4j$
	$3f$	$4k$
	$3g$	$4l$
	$3h$	

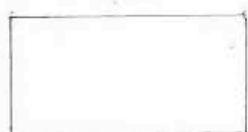
12) Πρόβλημα 3.7 από το βιβλίο «ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΕΡΕΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ» των Δ.
Παπαδόπουλου

$$\vec{a} = a \hat{x}, \vec{b} = 2a \hat{y}, \vec{c} = c \hat{z} \quad V_c = 2a^2 c$$

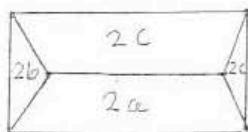
$$\vec{a}^* = \frac{2\pi}{2a^2 c} \vec{b} \times \vec{c} = \frac{2\pi}{a} \hat{y} \times \hat{z} = \frac{2\pi}{a} \hat{x}, \vec{b}^* = \frac{2\pi}{2a^2 c} \vec{c} \times \vec{a} = \frac{\pi}{a} \hat{z} \times \hat{x} = \frac{\pi}{a} \hat{y}$$



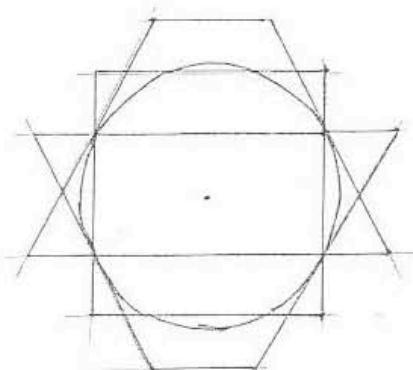
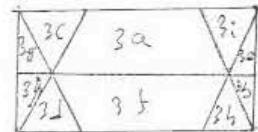
1^η Z.B.



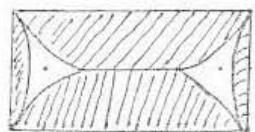
2^η Z.B.



3^η Z.B.



1^η Z.B.



2^η Z.B.

Isogenetische
Kontinuität,

13) Προβλήμα 3.12 από το βιβλίο «ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΕΡΓΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ» του Σ. Πλατωνόπουλου

$$E(\vec{R}) = E_0 - \alpha - \gamma \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}}$$

(ημιωνες γύρων)

Για να εντοπίσουμε τις συνθήκες γύρων που προστέθουν στην ημιωνες συμβολών $(0, 0, 0)$ ισχεύει:

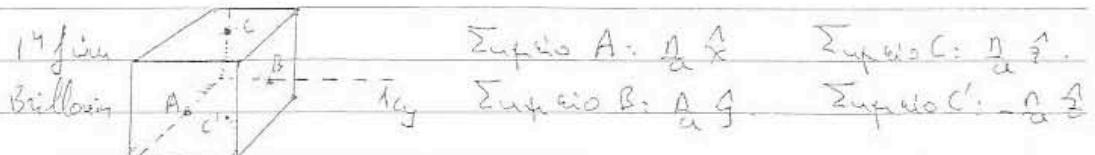
$$(\pm a, 0, 0), (0, \pm a, 0), (0, 0, \pm a) \quad (\alpha: συνδρόμος γύρων)$$

$$\sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} = e^{-ik_x a} + e^{ik_x a} + e^{-ik_y a} + e^{ik_y a} + e^{-ik_z a} + e^{ik_z a}$$

(ημιωνες γύρων)

$$= 2(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a)$$

'Αρχ: $E(\vec{k}) = E_0 - \alpha - 2\gamma(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a)$



$$\vec{\nabla}_{\vec{k}} E(\vec{k}) = \frac{\partial E}{\partial k_x} + \frac{\partial E}{\partial k_y} + \frac{\partial E}{\partial k_z}$$

$$= 2\gamma a \left\{ \frac{\partial}{\partial k_x} \sin k_x a + \frac{\partial}{\partial k_y} \sin k_y a + \frac{\partial}{\partial k_z} \sin k_z a \right\}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{k}} E(\vec{k}) \Big|_{\left(\frac{\pi}{a}, 0, 0\right)} = 2\gamma a \left\{ \frac{\partial}{\partial k_x} \sin(\pi) + \frac{\partial}{\partial k_y} \sin(0) + \frac{\partial}{\partial k_z} \sin(0) \right\} = 0.$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{k}} E(\vec{k}) \Big|_{(0, \pm a, 0)} = 2\gamma a \left\{ \frac{\partial}{\partial k_x} \sin(0) + \frac{\partial}{\partial k_y} \sin(\pm \pi) + \frac{\partial}{\partial k_z} \sin(0) \right\} = 0$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{k}} E(\vec{k}) \Big|_{(0, 0, \pm a)} = 2\gamma a \left\{ \frac{\partial}{\partial k_x} \sin(0) + \frac{\partial}{\partial k_y} \sin(0) + \frac{\partial}{\partial k_z} \sin(\pm \pi) \right\} = 0$$

b) $\frac{\partial E}{\partial k_x} = 2\gamma a \sin k_x a, \frac{\partial E}{\partial k_y} = 2\gamma a \sin k_y a + \frac{\partial E}{\partial k_z} = 2\gamma a \sin k_z a$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k_x^2} = 2\gamma a^2 \cos k_x a, \frac{\partial^2 E}{\partial k_y^2} = 2\gamma a^2 \cos^2 k_y a, \frac{\partial^2 E}{\partial k_z^2} = 2\gamma a^2 \cos^2 k_z a$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_y} = \frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_x} = \frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_z} = \frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_x} = \frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_z} = \frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_y} = 0$$

$$\frac{1}{m\omega} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2} = \frac{2\pi a}{h^2} \begin{pmatrix} \cos k_x a & 0 & 0 \\ 0 & \cos k_y a & 0 \\ 0 & 0 & \cos k_z a \end{pmatrix}$$

\sum_{k_0} δένει $|k|$ πινακού: $\cosh k a \approx 1 + \frac{k^2 a^2}{2}$

$$\left(\frac{1}{m\omega} \right) \xrightarrow{|k| \ll a} \frac{2\pi a}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{8\pi^3}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_z^2 \end{pmatrix}$$

14) Πρόβλημα 3.19 από το βιβλίο «ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΕΡΕΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ» του Σ. Παπαδόπουλου.

$$E(k) = E_1 + (E_2 - E_1) \sin^2(\alpha k_x / 2), \quad \vec{E} = E_x \hat{x}.$$

$$V_F(k) = \frac{1}{h} \frac{dE}{dk} = \frac{1}{h} (E_2 - E_1) 2 \sin^2\left(\frac{\alpha k_x}{2}\right) \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha k_x}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 E}{dk^2} = \alpha(E_2 - E_1) \left[\frac{\alpha}{2} \cos^2\left(\frac{\alpha k_x}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} \sin^2\left(\frac{\alpha k_x}{2}\right) \right]$$

$$\therefore \frac{1}{m\omega} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2 E}{dk^2} = \frac{\alpha^2}{2h^2} (E_2 - E_1) \left[\cos^2\left(\frac{\alpha k_x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha k_x}{2}\right) \right]$$

$$F = -eE = \frac{dp}{dt} = t \frac{dk}{dt} \Rightarrow \frac{dk}{dt} = -\frac{eE}{h} \Rightarrow k(t) = k_0 - \frac{eE}{h} t$$

$$\text{Άριθμ.: } V_F(t) = \frac{a}{h} (E_2 - E_1) \sin\left(-\frac{aeE}{h}t\right) \cos\left(-\frac{aeE}{h}t\right) \quad (k_0 = 0)$$

$$= \frac{a}{2h} (E_2 - E_1) \sin\left(-\frac{aeE}{h}t\right) \cdot \Rightarrow T = \frac{2\pi h}{aeE}$$

