

Όνοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Έστω $S = \{e_i : i \in I\}$ ένα μη κενό υποσύνολο ενός άπειρης διάστασης μιγαδικού χώρου Hilbert H .

(i) Δώστε τους ορισμούς: 1. S ορθοκανονικό. 2. S ορθοκανονική βάση του H . Δείξτε ότι το S είναι ορθοκανονική βάση του H αν και μόνο αν το S είναι ορθοκανονικό και ισχύει $[e_i : i \in I] = H$.

(ii) Έστω $\{f_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ ένα (πεπερασμένο) ορθοκανονικό υποσύνολο του H και $h \in H$. Ναδειχθεί ότι είναι

$$\sum_{i=1}^n |\langle h, f_i \rangle|^2 \leq \|h\|^2.$$

(iii) Δείξτε ότι αν $x, y \in H$ τότε είναι: $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\| \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Θ2. Έστω H ένας χώρος Hilbert, $\{e_1, e_2, \dots\}$ μια ορθοκανονική βάση του και (λ_n) μια φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$T : H \rightarrow H, Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i$$

για κάθε $x \in H$. Να δείξετε ότι η T είναι ένας φραγμένος τελεστής και να υπολογίσετε την νόρμα του. Να εξετάσετε αν ο T έχει ιδιοτιμές.

Θ3. Έστω $A, B \in \mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι για τους συζυγείς A^*, B^* ισχύουν οι ιδιότητες:

α) (i) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ (ii) $(AB)^* = B^* A^*$ (iii) $\|A^* A\| = \|A\|^2$.

β) Πότε ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός; Για ένα θετικό τελεστή A δείξτε ότι ισχύει:

$$|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \langle Ay, y \rangle.$$

Θ4. Έστω X ένας χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$. Πότε λέμε ότι ο T είναι κάτω φραγμένος; Να δείξετε ότι ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(X)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι κάτω φραγμένος και έχει πυκνό σύνολο τιμών ($\mathcal{R}(T) = X$).

Θ5. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ένας φραγμένος τελεστής.

(i) Πότε ο P λέγεται ταυτοδύναμος τελεστής; Να δείξετε ότι ο P είναι ταυτοδύναμος αν και μόνο αν ο $I - P$ είναι ταυτοδύναμος.

(ii) Έστω $P \in \mathcal{B}(H)$ ένας ταυτοδύναμος τελεστής. Δείξτε ότι ο P είναι ορθογώνια προβολή αν και μόνο αν είναι αυτοσυζυγής ($P = P^*$).

Θ6. Έστω H ένας άπειρης διάστασης διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$.

(i) Πότε ο T λέγεται τελεστής (πεπερασμένης) τάξης n ; Αν είναι γνωστό ότι κάθε τελεστής T τάξης n γράφεται ως $T = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$, όπου τα διανύσματα $\{e_i\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και τα $\{f_i\}$ ορθοκανονικά, να δείξετε ότι ο συζυγής του T είναι ο $T^* = \sum_{i=1}^n f_i \otimes e_i$.

(ii) Να δώσετε τον ορισμό του συμπαγούς τελεστή. Να δείξετε ότι ο $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης η οποία συγκλίνει, ως προς την τοπολογία της νόρμας, στον A .

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα.

Διάρκεια εξέτασης 2.45'.