

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**
ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ / 6^ο Εξάμηνο

4-10-2007

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν $A = USV^T$ είναι η SVD παραγοντοποίηση του $A \in \mathbb{R}_{\mu \times v}$

- I. Βρείτε την SVD παραγοντοποίηση του A^T και A^{-1} , όταν $\mu = v$. (1 μ)
II. Αν οι γραμμές a_i του A είναι ορθογώνια διανύσματα, ποιες είναι οι ιδιάζουσες τιμές του A ; (0.5 μ)

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}_{v \times v}$ είναι κανονικός. Αποδείξτε:

- I. $\|Ax\|_2 = \|A^T x\|_2$, για κάθε διάνυσμα x . (0.5 μ)
II. Ο πίνακας A διαγωνοποιείται και $\sum_{i=1}^v |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^v |a_{ij}|^2$, όπου λ_i είναι ιδιοτιμές του A . (1.5 μ)
III. Αν έχει την ιδιότητα $A^k = I$, τότε A είναι ορθομοναδιαίος. (1 μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω $A = M + iN$, όπου M είναι το ερμιτιανό μέρος του A , $\left(M = \frac{A + A^*}{2} \right)$.

Αποδείξτε:

- I. $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ (1 μ)
II. $\|M\|_2 \leq \|A\|_2$, $\|N\|_2 \leq \|A\|_2$ (1 μ)
III. $\|A\|_F^2 = \|M\|_F^2 + \|N\|_F^2$ (2 μ)

ΘΕΜΑ 4^ο

Αν τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $a_i \in \mathbb{R}^v$ είναι οι στήλες του πίνακα A , εφαρμόστε την QR παραγοντοποίηση για να δείξτε

$$|\det A| \leq \|a_1\|_2 \|a_2\|_2 \cdots \|a_v\|_2.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Azon

$$1. A = USV^T \Rightarrow A^T = V S^T U^T \\ \Rightarrow A^{-1} = V S^{-1} U^T \quad (s_i \neq 0, \forall i)$$

Enyedi $AA^T = \text{diag}(1\|a_1\|^2, \dots, 1\|a_n\|^2) \Rightarrow s_i = \|a_i\|$

Ezután $s_i \in \mathbb{R}$.

$$2. AA^T = A^T A \Rightarrow x^T A^T A x = x^T (A^T)^T A^T x \Rightarrow \|Ax\|^2 = \|A^T x\|^2 \\ \Rightarrow \|Ax\| = \|A^T x\|$$

A normával $\Rightarrow A = M \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) M^T$, össze $MM^T = I$

$$\Rightarrow A^k = M \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_r^k) M^T = I \Rightarrow \lambda_i^k = 1 \Rightarrow$$

$$|\lambda_i| = 1. \quad \text{Tízre } AA^* = M \text{diag}((\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_r\|^2)) M^T \\ = I$$

Azon. 7, 2.

$$3. \text{ Enyedi } AA^* = (A^*)^* A^* \Rightarrow \sigma_A = \sigma_{A^*} \Rightarrow$$

$$\text{I} \quad \|A\|_2 = \max \left\{ \sqrt{\lambda_{AA^*}} \right\} = \max \left\{ \sqrt{\lambda_{(A^*)^* A^*}} \right\} = \|A^*\|_2$$

$$\text{II} \quad A = M + iN \quad \text{önök } M = \frac{A+A^*}{2}, \quad N = \frac{A-A^*}{2i}$$

$$\|M\|_2 = \left\| \frac{A+A^*}{2} \right\|_2 \leq \frac{\|A\|_2 + \|A^*\|_2}{2} = \|A\|_2$$

$$\text{Opcionálisan } \|N\|_2 \leq \|A\|_2.$$

$$\text{III} \quad \|A\|_F^2 = 2 |a_{ij}|^2 + \frac{|a_{ij} + \bar{a}_{ji}|}{2}$$

$$\text{Enus: } \frac{|a_{ij} + \bar{a}_{ji}|^2}{4} + \frac{|a_{ij} - \bar{a}_{ji}|^2}{4} = 2 + \frac{|a_{ij} - \bar{a}_{ji}|^2}{4} = \frac{|a_{ij} + \bar{a}_{ji}|^2}{2}$$

$$\text{Hence } |a_{ij} + \bar{a}_{ji}|^2 + |a_{ij} - \bar{a}_{ji}|^2 = 2(|a_{ij}|^2 + |\bar{a}_{ji}|^2)$$

$$\text{Exeupse } \|M\|_F^2 + \|N\|_F^2$$

$$4. \quad A = QR \Rightarrow \det A = \det Q \det R = (\pm 1) c_{11} c_{22} \dots c_{nn}$$

$$A) \quad q_i = c_{i1} q_1 + c_{i2} q_2 + \dots + c_{in} q_n \quad (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\Rightarrow \|q_i\| \geq |c_{ii}|$$

$$\Rightarrow |\det A| = |c_{11}| |c_{22}| \dots |c_{nn}| \leq \|q_1\|_2 \dots \|q_n\|_2$$