

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

18-10-2007

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

( 2.5 μ )

Βρείτε την ιδιάζουσα παραγοντοποίηση του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  και τις γνωστές νόρμ του  $A$ .

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

( 2 μ )

Για τους  $\mu \times \nu$  πίνακες  $A$  και  $B$  αποδείξτε :

I. αν  $\text{rank}(A - B) \leq k \Rightarrow |\text{rank}A - \text{rank}B| \leq k$

II. αν  $\text{rank}B = \sigma \leq \rho = \text{rank}A \Rightarrow \rho - \sigma \leq \text{rank}(A + B) \leq \rho + \sigma$

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

( 3 μ )

Αν ο πίνακας  $A$  είναι κανονικός, αποδείξτε:

I.  $\|Ax\|_2 = \|A^*x\|_2$ , για κάθε διάνυσμα  $x$

II.  $\ker A = \ker A^*$

III.  $\text{Im} A = (\ker A)^\perp$

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

( 3.5 μ )

Ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}_{\nu \times \nu}$  ονομάζεται *σύμμορφος* ακριβώς όταν υπάρχει  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$  τέτοιος ώστε

$$Ax \circ Ay = c(x \circ y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^\nu.$$

Αποδείξτε ότι :

A είναι σύμμορφος ακριβώς όταν  $A^T A = cI$

II. το γινόμενο σύμμορφων πινάκων είναι σύμμορφος πίνακας

III. όταν  $\det A \neq 0$  και  $x \circ y = 0 \Rightarrow Ax \circ Ay = 0$ , τότε ο πίνακας  $A$  είναι σύμμορφος. (Υπόδειξη : Εφαρμόσατε την SVD παραγοντοποίηση του  $A$ ).

**Διάρκεια εξέτασης : 3 ώρες**

1.  $AA^T = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $\sigma(AA^T) = \{4, 9\}$

Για  $\lambda = 4$ , αντιστοιχεί ιδιοδιάνυσμα  $y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Για  $\lambda = 9$ ,  $\sim \sim \sim$   $y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Συνεπώς  $x_1 = \frac{1}{2} A^T y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  και  $x_2 = \frac{1}{3} A^T y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Τότε  $A = U S V^T$  όπου  $S = \text{diag}(2, 3)$  και

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Επιπλέον  $\|A\|_1 = \max\{3, 4\} = 4$ ,  $\|A\|_{\infty} = \max\{4, 3\} = 4$

$\|A\|_2 = \max\{2, 3\} = 3$ ,  $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr} A^T A} = \sqrt{13}$ .

2. Άσκηση 2.5 και 2.6.

3. Άσκηση 7.8

4. i.  $Ax \circ Ay = c(x \circ y) \Leftrightarrow y^T A^T A x = c y^T x \Leftrightarrow y^T (A^T A - cI)x = 0 \quad \forall x, y$

$\Leftrightarrow A^T A = cI$ .

ii. Έστω  $A^T A = c_1 I$  και  $B^T B = c_2 I$ , ~~και~~ όπου  $c_1, c_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ , τότε  
 $(AB)^T AB = B^T A^T A B = c_1 B^T B = c_1 c_2 I$ , όπου  $c_1 c_2 \neq 0$ .

iii. Έστω  $A = U S V^T$  είναι η SVD παραγοντοποίηση του  $A$ , όπου  $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_r)$ . Επειδή  $\det A \neq 0 \Rightarrow s_i \neq 0$ . Τότε, για  $x \circ y = 0$  τα διανύσματα  $\alpha = Vx$  και  $\beta = Vy$  είναι μη θενικά, μη θενικά  $\alpha \circ \beta = Vx \circ Vy = y^T V^T V x = y^T x = x \circ y = 0$  και από την ιδιότητα  $Ax \circ Ay = 0 \Rightarrow \beta^T S^2 \alpha = 0 \Rightarrow s_1^2 \alpha_1 \beta_1 + \dots + s_r^2 \alpha_r \beta_r = 0$ . Συνεπώς,  $(s_1^2 - s_r^2) \alpha_1 \beta_1 + \dots + (s_{r-1}^2 - s_r^2) \alpha_{r-1} \beta_{r-1} = 0$ ,  $\forall \alpha_i, \beta_i \Rightarrow s_1^2 = \dots = s_r^2 \Rightarrow s_1 = \dots = s_r = s$  διότι  $s_i > 0$ . και  $A = C U V^T$  ήδη από προηγούμενα  
 ή χοντρά  $A^T A = c^2 I \Rightarrow A$  συμμορφώσιμη.