

ΣΕΜΦΕ 5<sup>ο</sup> Εξάμηνο  
 Αριθμητική Ανάλυση II  
 Εργασία 2012

**Μέρος 1<sup>ο</sup>**

**Ερώτημα 1**

Να μετατραπεί το πρόγραμμα **rk4.m** ώστε να υλοποιεί τη μέθοδο Runge-Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης με 5 στάδια με συντελεστές:

0	0	0	0	0	0
1/3	1/3	0	0	0	0
1/3	1/6	1/6	0	0	0
1/2	1/8	0	3/8	0	0
1	1/2	0	-3/2	2	0
	1/6	0	0	2/3	1/6

Το πρόγραμμα να ονομασθεί **nrk4.m**

**Ερώτημα 2**

Να μετατραπεί το πρόγραμμα **ab5sem.m** ώστε να υλοποιεί τη πολυβηματική μέθοδο τύπου **BDF4** με 4 στάδια:

$$25y_{n+4} - 48y_{n+3} + 36y_{n+2} - 16y_{n+1} + 3y_n = 12hf_{n+4},$$

όπου  $f_{n+4} = f(x_{n+4}, y_{n+4})$  το πρόγραμμα να ονομασθεί **bdf4.m** (προσοχή είναι έμμεση μέθοδος και πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Newton-Raphson).

**Ερώτημα 3**

Να μετατραπεί το πρόγραμμα **pc5.m** ώστε να υλοποιεί τη πολυβηματική μέθοδο διόρθωσης:

$$y_{n+4}^p = y_{n+3} + \frac{h}{24}(55f(x_{n+3}, y_{n+3}) - 59f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 37f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 9f(x_n, y_n))$$

$$y_{n+4}^c = y_{n+3} + \frac{h}{24}(9f(x_{n+4}, y_{n+4}^p) + 19f(x_{n+3}, y_{n+3}) - 5f(x_{n+2}, y_{n+2}) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

το πρόγραμμα να ονομασθεί **pc4.m**.

## Μέρος 2°

### Ερώτημα 4

Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = -0.3v(t) - \sin(u(t))$$

με αρχικές τιμές  $u(0) = \frac{\pi}{2}$  και  $v(0) = 0$ .

A) Να λύσετε το πρόβλημα με τη **nrk4.m** στο διάστημα **[0,15]** με **h=0.3, h=0.15, h=0.0075**.

B) Τι παρατηρείτε;

Γ) Να τρέξετε το ίδιο πρόβλημα με **h=0.0075** και με την improved Euler. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

### Ερώτημα 5

Είναι γνωστό ότι για μία πολυβηματική μέθοδο με τάξη  $p$  για το ολικό σφάλμα ισχύει:

$$GE_{n+1} = \|y_{n+1} - y(x_{n+1})\| = O(h^p) \leq K \cdot h^p.$$

Από αυτή τη σχέση βλέπουμε ότι αν υποδιπλασιάσουμε το βήμα  $h$  αναμένουμε το νέο ολικό σφάλμα να έχει ένα νέο πηλίκο με το παλαιό περίπου ίσο με  $2^{-p}$ . Με βάση αυτή τη παρατήρηση μπορούμε από τη συμπεριφορά του ολικού σφάλματος να βρούμε εμπειρικά τη τάξη της μεθόδου.

Στο ερώτημα αυτό να λύσετε το πρόβλημα από το πίνακα που ακολουθεί, και αντιστοιχεί σε αύξοντα αριθμό ίσο με το τελευταίο ψηφίο του αριθμού φοιτητικού μητρώου σας. Γράψτε οδηγό πρόγραμμα Matlab (script) το οποίο να λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών, που σας αντιστοιχεί, με την **bdf4.m** για εννέα διαφορετικά βήματα ( $h = 2^{(-k)}, k = 2, \dots, 10$ ). Το πρόγραμμα να καταχωρεί σε ένα διάνυσμα το μέγιστο απόλυτο σφάλμα για τις διάφορες επιλογές του βήματος  $h$ . Στη συνέχεια να υπολογίζει και να καταχωρεί σε ένα άλλο διάνυσμα το πηλίκο των δυο διαδοχικών μέγιστων σφαλμάτων. Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε παραπάνω, που θα πρέπει να τείνουν οι όροι του τελευταίου αυτού διανύσματος και γιατί; Το πρόγραμμα να χρησιμοποιεί την εντολή **for** και να είναι δυνατό με μία αλλαγή τιμής μεταβλητής να μπορεί να αλλάξει ο αριθμός των φορών που λύνει το πρόβλημα μειώνοντας το βήμα στη μέση.

Επαναλάβατε το ίδιο και για την **pc4.m**.

ΑΑ	Πρόβλημα	Αρχική τιμή	Διάστημα λύσης	Πραγματική λύση
0	$y' = 1/t^2 - y/t - y^2$	$y(1) = -1$	[1,20]	$y(t) = -1/t$
1	$y' = y/t - (y/t)^2$	$y(1) = 1$	[1,4]	$y(t) = t/(1 + \ln(t))$
2	$y' = 1 + y/t + (y/t)^2$	$y(1) = 0$	[1,4]	$y(t) = t \tan(\ln(t))$
3	$y' = -(y+1)(y+3)$	$y(0) = -2$	[0,5]	$y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$
4	$y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$	$y(0) = 1/3$	[0,5]	$y(t) = 1/\sqrt{3 + 2t^2 + 6e^{t^2}}$
5	$y' = \cos(2t) + \sin(3t)$	$y(0) = 1$	[0,10]	$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{4}{3}$
6	$y' = 1 + (y-t)^2$	$y(2) = 1$	[2,5]	$y(t) = t + 1/(1-t)$
7	$y' = y - t^2 + 1$	$y(0) = 1/2$	[0,3]	$y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^{-t}$
8	$y' = 2t - y$	$y(0) = -1$	[0,5]	$y(t) = e^{-t} + 2t - 2$
9	$y' = -y - 2t$	$y(0) = -1$	[0,5]	$y(t) = -3e^{-t} - 2t + 2$

### Οδηγίες.

- Ο παταλητικός χρόνος παράδοσης θα οριστεί μετά από συννενόηση με το διδάσκοντα.
- Τα προβλήματα που θα λύσετε θα είναι αυτά του πίνακα με ΑΑ των αριθμών που ορίζει το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.
- Θα πρέπει να παραδοθεί η εργασία συρραμμένη έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να τη ξεψυλλίσει. Η εργασία θα πρέπει να έχει εξώφυλλο στο οποίο να αναφέρεται ο αύξων αριθμός της, το όνομα του φοιτητή, τα στοιχεία της σχολής και του μαθήματος, η ημερομηνία παράδοσης, η ώρα που παρακολουθεί το εργαστήριο και ο αριθμός μητρώου του. Σε παράρτημα θα πρέπει να υπάρχουν εκτυπωμένοι οι κώδικες (τα προγράμματα, scripts και .m αρχεία). Στο κώδιο μέρος της εργασίας θα πρέπει να αναπτύσσεται η διαδικασία, τα σχόλια, τα γραφήματα, και μόνο όσα από τα αποτελέσματα είναι απαραίτητα για τα συμπεράσματα. Εκτός απ' τις όποιες εκτυπώσεις, θα πρέπει να παραδοθούν τα προγράμματα και τα αποτελέσματά τους σε ηλεκτρονική μορφή.
- Τόσο η πληρότητα, τα σχόλια, το αν ακολουθήθηκαν οι οδηγίες, και ο τρόπος της παρουσίασης των αποτελεσμάτων της εργασίας που θα παραδοθεί θα ληφθούν υπόψιν κατά την αξιολόγηση.

### Μέρος 3<sup>ο</sup>

#### Ερώτημα 6

Χρησιμοποιώντας τις κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης να γράψετε ένα πρόγραμμα Matlab (σε μορφή script) το οποίο να κατασκευάζει προσεγγίσεις για προβλήματα συνοριακών τιμών της μορφής:

$$-u''(x) + g(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $g(x) > 0$ ,  $r(x) > 0$ , και  $f(x)$  είναι ομαλές και ότι χρησιμοποιούμε ισαπέχοντα σημεία διαμέρισης.

(α) Να γράψετε αναλυτικά το γραμμικό σύστημα που προκύπτει, και να μελετήσετε την επιλυσιμότητά του.

(β) Να χρησιμοποιήσετε το πρόγραμμά σας για να λύσετε το πρόβλημα συνοριακών τιμών της μορφής:

$$-u''(x) + e^x u'(x) + 10^{-4} u(x) = 10^{-4} (x^2 - 5x)e^{-x} - (x^2 - 9x + 12)e^{-x},$$

$$u(0) = 0, \quad u(5) = 0.$$

Συγκεκριμένα να τρέξετε το πρόγραμμά σας χρησιμοποιώντας διαμερίσεις μήκους  $h=0.5$ ,  $h=0.1$  αντιστοίχως και να τυπώσετε τις τελευταίες 5 τιμές που υπολόγισε ο κωδικός σας. Να παρουσιάσετε τις υπόλοιπες τιμές με τη βοήθεια γραφήματος.

(γ) Χρησιμοποιώντας τις οδηγίες του ζητήματος 5, να προσπαθήσετε να υπολογίσετε αριθμητικά την τάξη σύγκλισης της μεθόδου.

Οδηγίες:

1) Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες προσεγγίσεις για την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο:

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

2) Για τη λύση του γραμμικού συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις συναρτήσεις του Matlab που επιλύουν γραμμικά συστήματα, είτε να κατασκευάσετε μια συνάρτηση που λύνει τριδιαγώνια συστήματα.