

**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ II & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ»**  
**Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.**  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 09/2012**

**Θέμα 1 (3 βαθμοί):** (α) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών στο  $[0,1]$ :

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{5}y &= (2x - \frac{1}{5}x^2)\sin x - x^2 \cos x \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του σφάλματος για την άμεση μέθοδο του Euler (με ομοιόμορφο βήμα),  $|y_n - y(x_n)| \leq \frac{h}{2} \frac{e^{L(x_n - x_0)} - 1}{L} \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |y''(x)|$  (όπου  $L$  είναι η σταθερά Lipschitz της  $f$  ως προς  $y$ ), να υπολογιστεί το βήμα  $h$  ώστε το σφάλμα στο  $x_N = 1$  να είναι μικρότερο από  $10^{-4}$ .

Δίνεται η λύση:  $y(x) = x^2 \sin x$ .

(β) Για το πρόβλημα του ερωτήματος (α) να ορίσετε την πεπλεγμένη (έμμεση) μέθοδο του Euler στο διάστημα  $[0,1]$  με βήμα  $h=1/N$ , και να υπολογίσετε μια προσέγγιση του  $y(1)$  χρησιμοποιώντας 2 υποδιαστήματα.

(γ) Να μελετήσετε την πεπλεγμένη (έμμεση) μέθοδο του Euler ως προς τη μηδενική ευστάθεια, και την A- ευστάθεια.

**Θέμα 2 (3 βαθμοί):** (α) Να εξετάσετε τις ακόλουθες πολυβηματικές μεθόδους ως προς τη μηδενική ευστάθεια:

$$\begin{aligned} (1) \quad y_{n+3} &= y_{n+2} + \frac{h}{24} (9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n) \\ (2) \quad y_{n+3} - 2y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n &= h(2f_{n+2} + 5f_{n+1}) \end{aligned}$$

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με  $f_i = f(x_i, y_i)$ . Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις  $f(x, y)$  και  $y(x)$  είναι ομαλές και ότι οι αρχικές συνθήκες κατάλληλα επιλεγμένες.

(β) Συγκλίνουν οι μέθοδοι (1) και (2); Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

**Θέμα 3 (2 βαθμοί) :** (α) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου  $a$  στο διάστημα  $[0,1]$ , ώστε η μέθοδος

$$y_{n+1} = y_n + h((1 - \frac{a}{2})f_n + \frac{a}{2}f_{n+1})$$

να είναι συγκλίνουσα.

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με  $f_i = f(x_i, y_i)$ . Μπορείτε να θεωρήσετε τη συνάρτηση  $f(x, y)$  Lipschitz και τη αρχική συνθήκη κατάλληλα επιλεγμένη.

(β) Για τιμή της παραμέτρου  $a = 1$ , να εκτελέσετε μία επανάληψη της μεθόδου του ερωτήματος (α) για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'(x) = \frac{1}{3} y^3, y(0) = 1$$

για τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής τιμής στο 0.2.

**Θέμα 4 (2 βαθμοί):**

(α) Έστω  $r(x), f(x)$ , συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις στο διάστημα  $[a, b]$  και  $r(x) \geq 0$  για κάθε  $a \leq x \leq b$ . Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} -u''(x) + r(x)u(x) &= f(x), & a < x < b \\ u(a) &= A, & u(b) = B. \end{aligned}$$

να οριστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας κενρικές διαφορές δεύτερης τάξης με ομοιόμορφη διαμέριση. Στη συνέχεια να δείξετε ότι το γραμμικό σύστημα που προκύπτει έχει λύση.

(β) Να ορίσετε την ασθενή λύση (λύση μεθόδου Galerkin) για το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}((e^{-x} + x)\frac{du}{dx}) + u(x) &= (2x - e^{-x})^2 + (x^2 + e^{-x})(3 + e^{-x}) \\ u(0) &= 1, \quad u(1) = e^{-1} + 1 \end{aligned}$$

Είναι η ασθενής λύση του προβλήματος μοναδική; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Διάρκεια εξέτασης: 2&1/2 ώρες.

Καλή επιτυγχία.

$$\begin{aligned} \underbrace{4x^2 - 4xe^{-x} + e^{-2x}}_{7x^2} + \underbrace{3x^2 + x^2e^{-x} + 3e^{-x} + e^{-2x}}_{3x+3} &= \\ 7x^2 & \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{\sqrt{3}} \\ \hline 3x + 3 = 31 \Rightarrow x \end{array}$$