

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ»
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011

Θέμα 1 (2 βαθμοῦ): (α) Να διατυπώσετε την άμεση και την έμεση μέθοδο του Euler για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0$$

(β) Για την άμεση μέθοδο του Euler, να ορίσετε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης (truncation error) T_n και να αποδείξετε με τη βοήθεια του θεωρήματος Taylor, ότι $|T_n| \leq T = \frac{1}{2} h \max_{a \leq x \leq b} |y''(x)|, n = 0, \dots, N-1$. Υποθέστε ότι η λύση y είναι ομαλή και οτι ο διαμερισμός του διαστήματος είναι ομοιόμορφος και μήκους h .

(γ) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών στο $[0, 1]$:

$$y' = \frac{1}{2} y + (1 - \frac{1}{2} x)e^{-(1/2)x} \\ y(0) = 0$$

Ο τύπος του σφάλματος για την άμεση μέθοδο του Euler είναι:

$$|e_n| \leq \frac{T}{L} \left(e^{L(x_n - x_0)} - 1 \right), n = 0, \dots, N, \text{ όπου } L \text{ είναι η σταθερά Lipschitz της } f \text{ ως προς } y.$$

Να υπολογιστεί το βήμα h για είναι το σφάλμα στο $x_N=1$ να είναι μικρότερο από 10^{-4} . Δίνεται $y(x) = xe^{-(1/2)x}$. Το βήμα είναι ομοιόμορφο.

Θέμα 2 (3 βαθμοῦ): (α) Θεωρούμε το γενικό πρόβλημα αρχικών τιμών, όπου η συνάρτηση f είναι ομαλή. Να εξετάσετε τις ακόλουθες πολυβηματικές μεθόδους ως προς τη μηδενική ευστάθεια και τη συνέπεια:

- (1) $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h(f_{n+1} + f_n)$
- (2) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = h(f_{n+2} + f_{n+1} + f_n)$
- (3) $y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 3h(f_{n+2} + 2f_{n+1})$

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με $f_i = f(x_i, y_i)$.

(β) Είναι οι παραπάνω μέθοδοι λογίες συγκλίνουσες; Αν ναι, ποια είναι η μέγιστη δυνατή τάξη σύγκλισης για τις παραπάνω μεθόδους;

Θέμα 3 (3 Βαθμοῦ): (α) Να μελετήσετε την μέθοδο (1) του ερωτήματος 2(a) ώς προς την A-ευστάθεια.

(β) Να εκτελέσετε μία επανάληψη της μεθόδου (1) του ερωτήματος (2)(a) για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'(x) = (1/4)y^3, y(0) = 1$$

για τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής τιμής στο 0.1. Για την επέλυση της μη-

γραμμικής εξίσωσης χρησιμοποιείστε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson: ($x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$, x_0 γνωστό).

(γ) Είναι δυνατό να κατασκευάσετε μία άμεση πολυβηματική μέθοδο A-ευσταθής και τάξης 3; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Θέμα 4 (2 βαθμοί): (a) Να ορίσετε την ασθενή λύση (λύση μεθόδου Galerkin) για το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(e^x \frac{du}{dx} \right) + e^{-x} u(x) &= (3 - 2x)e^{-x} + xe^{-3x} \\ u(0) = 1, \quad u(1) &= e^{-2} \end{aligned}$$

(β) Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (με κατάλληλες υποθέσεις για τα δεδομένα $p(x), r(x), f(x)$)

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + r(x)u(x) &= f(x) \\ u(a) = A, u(b) &= B \end{aligned}$$

η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχειών (Galerkin) όταν εφαρμόζεται με γραμμικές κατά τμήματα βασικές συναρτήσεις (τύπου στέγη) ικανοποιεί την εκτίμηση σφάλματος:

$$\| u - u^h \|_A \leq \frac{h}{\pi} \left\{ \max_{a \leq x \leq b} p(x) + \frac{h^2}{\pi^2} \max_{a \leq x \leq b} r(x) \right\}^{1/2} \| u^h(x) \|_{L^2(a,b)}$$

όπου $\| f \|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

Να υπολογίσετε το βήμα h (ομοιόμορφη διαμέριση) ώστε το σφάλμα να ικανοποιεί τη σχέση $\| u - u^h \|_A \leq 10^{-2}$ για το πρόβλημα του ερωτήματος (a). Δίνεται $u(x) = xe^{-2x}$.

Διάρκεια εξέτασης: 2&1/2 ώρες.

Καλή επιτυχία.