

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκοντες: **Ι. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου**

03-07-2008

Θέμα 1 (Μονάδες 0.7, 1.0, 0.8)

α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση:

$$x = \ln(2-x)$$

έχει μοναδική λύση ξ στο διάστημα $[0, 3/4]$.

β) Να δειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος:

$$x_{k+1} = g(x_k) = \ln(2-x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

συγκλίνει στο ξ για κάθε αρχικό σημείο $x_0 \in [0, 3/4]$.

γ) Να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου *Newton-Raphson* για την επίλυση της ανωτέρω εξίσωσης. Η αρχική προσέγγιση να υπολογιστεί γραφικά. ($x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$).

Θέμα 2 (Μονάδες 1.0, 1.0)

Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

α) Να ελεγχθεί αν συγκλίνει η μέθοδος *Gauss-Seidel* και αν ναι να γίνουν 2 επαναλήψεις της με αρχικό διάνυσμα το $(0, 0, 0)^T$

β) Να δοθεί μία καλή εκτίμηση σφάλματος στην 2^η επανάληψη, χρησιμοποιώντας κατάλληλη νόρμα του επαναληπτικού πίνακα της μεθόδου *Jacobi*.

Θέμα 3 (Μονάδες 0.8, 1.0, 0.7)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2}$.

α) Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής *Lagrange* που παρεμβάλλει την συνάρτηση στα σημεία $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$.

β) Να βρεθεί επίσης και μία εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής της μορφής: $|f(x) - p(x)| \leq M, \forall x \in [1, 3]$, εφαρμόζοντας τον αντίστοιχο τύπο σφάλματος της

παρεμβολής *Lagrange*. $\left\{ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right\}$.

γ) Να εφαρμόσετε αναλυτικά το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων με προσεγγιστικό μοντέλο την συνάρτηση, $f(x) = ax + b$, για την προσέγγιση των δεδομένων:

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	-8.5	-1.5	1.0	3.5	8.5

υπολογίζοντας μόνο το αντίστοιχο σύστημα των συνθηκών.

Θέμα 4 (Μονάδες 0.7, 0.8)

α) Να υπολογιστεί ο απλός τύπος Τραπεζίου χωρίς όρο σφάλματος, για την προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος.

β) Αν ο σύνθετος τύπος Τραπεζίου εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν, ώστε το σφάλμα να είναι το πολύ $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$

$$(E_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)).$$

Θέμα 5 (Μονάδες 1.0, 0.5)

Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

α) Να υπολογιστεί η παραγοντοποίηση $A=LU$, εφαρμόζοντας την απαλοιφή *Gauss* χωρίς οδήγηση, (οι πράξεις να είναι ακριβείς, κλάσματα).

β) Να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $b = [7, 5, 23]^T$, με βάση την προηγούμενη παραγοντοποίηση.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

⊙ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3.00 ΩΡΕΣ ⊙