

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

25 Φεβρουαρίου 2011

- Διαρκεια: $2 \frac{1}{2}$ ώρες,
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1^ο

Έστω $T[1..n]$ ένα διάνυσμα από ακεραίους. Να αναπτυχθεί αλγόριθμος ο οποίος εντοπίζει το συνεχές τμήμα του διανύσματος $T[i..j]$ τα στοιχεία του οποίου έχουν μέγιστο άθροισμα.

Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας. Να αναλύσετε την πολυπλοκότητά του.

Θέμα 2^ο

Έστω $T[1..n]$ ένα ταξινομημένο διάνυσμα από διακριτούς ακεραίους. Να αναπτυχθεί αλγόριθμος ο οποίος εντοπίζει (εάν υπάρχει) μία θέση i του διανύσματος τέτοια ώστε $T[i]=i$. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας να είναι $O(\log n)$.

Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας. Να αναλύσετε την πολυπλοκότητά του.

Θέμα 3^ο

Δίνονται δύο ακολουθίες X και Y , $|X| > |Y|$, οι οποίες αποτελούνται από γράμματα ενός κοινού αλφαριθμητικού και είναι αποθηκευμένες σε δύο διανύσματα αντίστοιχου μήκους. Να αναπτυχθεί αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει εάν η ακολουθία Y είναι υπο-ακολουθία της X . Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας να είναι $O(|X|)$.

Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας. Να αναλύσετε την πολυπλοκότητά του.

Θέμα 4^ο

Ο υπερ-κύβος (hypercube) διαστάσεως n είναι ένα γράφημα που ορίζεται ως εξής: Ο υπερ-κύβος διάστασης n είναι μία απλή κορυφή. Για να κτίσουμε τον υπερ-κύβο διάστασης n ξεκινάμε από έναν υπερ-κύβο διάστασης $n-1$. Παίρνουμε επίσης ένα ακριβές αντίγραφο αυτού του υπερ-κύβου. Τέλος ζωγραφίζουμε μία ακμή μεταξύ κάθε κορυφής του πρώτου αντίγραφου του υπερ-κύβου και της αντίστοιχης κορυφής του δεύτερου αντίγραφου.

- Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο υπερ-κύβος διαστάσεως n είναι διμερές γράφημα.
- Να δειχθεί με επαγωγή ότι οι ακμές του υπερ-κύβου διαστάσεως n μπορεί να χρωματιστούν χρησιμοποιώντας n χρώματα έτσι ώστε κανένα ζεύγος ακμών που είναι προσκείμενες στην ίδια κορυφή να έχουν το ίδιο χρώμα.

Θέμα 5^ο

Δίνονται τα παρακάτω προβλήματα:

INDEPENDENT SET (Σύνολο ανεξάρτητων κόμβων)

Δεδομένα: Ένα γράφημα $G=(V,E)$ και ένας θετικός ακέραιος $i \leq |V|$.

Ερώτηση: Περιέχει το γράφημα G σύνολο ανεξάρτητων κόμβων μεγέθους i ; Δηλαδή, υπάρχει $V' \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|V'|=i$ και $\forall u, v \in V'$ ισχύει ότι $(u,v) \notin E$;

CLIQUE

Δεδομένα: Ένα γράφημα $G=(V,E)$ και ένας θετικός ακέραιος $c \leq |V|$.

Ερώτηση: Περιέχει το γράφημα G κλίκα μεγέθους c ; Δηλαδή, υπάρχει $V' \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|V'|=c$ και $\forall u, v \in V'$ ισχύει ότι $(u,v) \in E$;

Με δεδομένο ότι το πρόβλημα CLIQUE είναι NP-complete, να δειχθεί ότι το INDEPENDENT SET πρόβλημα είναι επίσης NP-complete.