

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1 (4 μονάδες):

A) Έστω τυχαίο δείγμα X_1, \dots, X_n από το στατιστικό μοντέλο $\{X, \mathcal{X}, f(x; \theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m\}$. Να δοθεί ο ορισμός μιας επαρκούς δειγματοσυνάρτησης για την παράμετρο θ .

B) Έστω τυχαίο δείγμα X_1, \dots, X_n από την κατανομή Bernoulli με άγνωστη παράμετρο $0 < \theta < 1$. Με βάση τον ορισμό του (A) ερωτήματος να δείξετε ότι η $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι επαρκής δειγματοσυνάρτηση για το θ .

Γ) Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παραγοντοποίησης του Neyman. Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, \beta)$. Με βάση Κριτήριο Παραγοντοποίησης να βρεθεί επαρκής δειγματοσυνάρτηση, έστω T_2 , για την άγνωστη παράμετρο β .

Δ) Να βρείτε την σ.π.π. της T_2 και εν συνεχεία να ελέγξετε αν η T_2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της άγνωστης παραμέτρου β .

ΘΕΜΑ 2 (4 μονάδες):

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\theta > 0$.

- i) Ελέγξτε αν η παραπάνω κατανομή ανήκει στην E.O.K.
- ii) Να δείξετε ότι η $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι επαρκής και πλήρης δειγματοσυνάρτηση για το θ και εν συνεχεία να βρεθεί η κατανομή αυτής.
- iii) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της δειγματοσυνάρτησης $T_2 = 1/T_1$ και εν συνεχεία με τη βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να βρεθεί A.E.E.Δ., έστω T_3 , για την άγνωστη παράμετρο θ .
- iv) Να υπολογιστεί η διασπορά της δειγματοσυνάρτησης T_3 και να συγκριθεί με το Cramer-Rao κατώτατο φράγμα των διασπορών των αμερόληπτων εκτιμητριών της άγνωστης παραμέτρου θ .

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες):

Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν τον αριθμό εισαγωγών ημερησίως σε μια μεγάλη μαιευτική κλινική κατά την περίοδο 450 διαδοχικών ημερών. Θεωρήστε ότι ο αριθμός των εισαγωγών στο εν λόγω μαιευτήριο ημερησίως ακολουθεί την κατανομή Poisson με άγνωστη παράμετρο $\lambda > 0$.

Αριθμός Εισαγωγών	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Συχνότητα (αριθμός ημερών)	15	49	81	93	86	63	35	19	7	2

- i) Να βρεθεί και να υπολογιστεί η εκτιμήτρια του λ με τη μέθοδο των ροπών.
- ii) Να βρεθεί και να υπολογιστεί η εκτιμήτρια του λ με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.
- iii) Να κατασκευαστεί και να υπολογιστεί ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης του λ με σ.ε. $\gamma = 0.90$.

** Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ h**

EYXOMAI EΠΙΤΥΧΙΑ