

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ II ΣΕΜΦΕ, 9/7/2012

ΘΕΜΑ 1. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Εξετάστε αν υπαρχει το παρακάτω όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Είναι $|f(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y|$, αφού $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Έστω μία οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ με $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ για κάθε n . Έχουμε $|f(x_n, y_n)| \leq |y_n|$ και άρα αφού $y_n \rightarrow 0$ έχουμε $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Συνεπώς το όριο της $f(x, y)$ στο $(0, 0)$ είναι το $0 = f(0, 0)$ και άρα η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Προσοχή! Δεν είναι σωστό να επιλέξουμε μια συγκεκριμένη μηδενική ακολουθία (x_n, y_n) και να πιστοποιήσουμε ότι $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Πρέπει αυτό να συμβαίνει για μια οποιαδήποτε $(x_n, y_n) \rightarrow 0$ με $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$.

(β) Χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες $(1/n, 0)$ και $(1/n, 1/n)$ καταλήγουμε σε διαφορετικά όρια και άρα το δούθεν όριο δεν υπάρχει.

Σημείωση: Το Θέμα 1 λύνεται και με χρήση πολικών συντεταγμένων.

ΘΕΜΑ 2. (α) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

(γ) Η θερμοκρασία σε κάθε σημείο του χώρου δίνεται από τον τύπο

$$T(x, y, z) = e^{x^2} + zy^3.$$

Βρείτε τις κατευθύνσεις για τις οποίες από το σημείο $(1, 2, 3)$ η θερμοκρασία ελαττώνεται και αυξάνεται γρηγορότερα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Όταν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - T(x - x_0, y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε είναι και μερικώς παραγωγίσιμη και η T δίνεται από τον τύπο $T(x, y) = ax + by$, όπου $a = f_x(x_0, y_0)$ και $b = f_y(x_0, y_0)$.

Προσοχή! Δεν είναι σωστό να πούμε ότι είναι παραγωγίσιμη όταν είναι μερικώς παραγωγίσιμη.

(β) Δείχνουμε πρώτα ότι $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Πράγματι,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0,$$

και ομοίως για $f_y(0, 0)$. Έστω ότι f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. Τότε $T(x, y) = 0$ και

$$0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - T(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2 + y^2}}$$

Όμως όπως και στο Θέμα 1 (β) δείχνουμε ότι το παραπάνω όριο δεν υπάρχει και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

(γ) Έχουμε $\nabla T(x, y, z) = (2xe^{x^2}, 3y^2z, y^3)$. Από γνωστό θεώρημα, έχουμε ότι σε κάθε σημείο (x, y, z) του χώρου, η κατεύθυνση όπου έχουμε μέγιστο ρυθμό αύξησης (αντ. ελάττωσης) είναι η κατεύθυνση $\nabla T(x, y, z)$ (αντ. $-\nabla T(x, y, z)$). Αντικαθιστούμε με $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Άν $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, πότε ένα σημείο (x_0, y_0) δεν είναι τοπικό ακρότατο για την f ;

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους εως και δεύτερης τάξης. Υποθέτουμε ότι $f_{xx}(\mathbf{x}) \cdot f_{yy}(\mathbf{x}) < 0$ για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Όταν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν δύο σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ με απόσταση από το (x_0, y_0) μικρότερη του δ και

$$f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2).$$

(β) Έχουμε ότι $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy} < 0$, δηλαδή κάθε σημείο (x, y) είναι σαγματικό, άρα όχι τοπικό ακρότατο.

Προσοχή! Δεν είναι σωστό το αντίστροφο του (β), δηλαδή να πούμε ότι αν ένα σημείο (x, y) δεν είναι τοπικό ακρότατο τότε $\Delta(x, y) < 0$. Διότι μπορεί να συμβεί είτε να μήν υπάρχει η Δ στο σημείο αυτό ή να υπάρχει και να είναι 0.

ΘΕΜΑ 4. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4.$$

Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

(β) Βρείτε τα ακρότατα της $F(x, y, z) = x + y + z$ υπο την συνθήκη $G(x, y, z) = 0$ όπου $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$. Τι σημαίνουν γεωμετρικά τα σημεία αυτά;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Έχουμε

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x, \quad f_y(x, y) = 6xy - 6y.$$

Λύνοντας το σύστημα $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ παίρνουμε τα εξής 4 στάσιμα σημεία

$$(0, 0), \quad (2, 0), \quad (1, 1), \quad (1, -1).$$

Πράγματι, ξεκινάμε με την $f_y(x, y) = 0$ και έχουμε $x = 1$ ή $y = 0$. Αν $x = 1$ τότε από την $f_x(x, y) = 0$ έχουμε $3y^2 - 3 = 0$ άρα $y = 1$ ή $y = -1$, οπότε έχουμε τα δύο πρώτα σημεία $(1, 1)$ και $(1, -1)$. Ομοίως αν $y = 0$ παίρνουμε $3x^2 - 6x = 0$ οπότε $x = 0$ ή $x = 2$, οποτε έχουμε τα άλλα δύο σημεία $(0, 0)$ και $(2, 0)$.

Βρίσκουμε τώρα τις 2ης τάξης παραγώγους,

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 6, \quad f_{yy}(x, y) = 6x - 6, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6y.$$

Επίσης

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y).$$

Έχουμε

- (1) $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$ και $\Delta(0, 0) = 36 > 0$. Άρα το $(0, 0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- (2) $f_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ και $\Delta(2, 0) = 36 > 0$. Άρα το $(2, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.
- (3) $\Delta(1, 1) = \Delta(1, -1) = -36 < 0$. Άρα τα $(1, 1)$ και $(1, -1)$ είναι σαγματικά σημεία.

(β) Με πολλαπλασιαστές Lagrange: Λύνουμε το σύστημα

$$\nabla F(x, y, z) = \lambda \nabla G(x, y, z) \quad \text{και} \quad G(x, y, z) = 0.$$

Εύκολα καταλήγουμε ότι

$$x = y = z \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Άρα είτε $(x_1, y_1, z_1) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ ή $(x_2, y_2, z_2) = -(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$. Επειδή, η F ως συνεχής συνάρτηση θα λαμβάνει σύγουρα και μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στην σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ και επιπλέον

$$F(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}) > F(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}),$$

συμπεραίνουμε ότι το $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ είναι θέση ολικού μέγιστου ενώ το $-(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ολικού ελάχιστου. Γεωμετρικά τα σημεία αυτά απεικονίζουν τα σημεία επαφής της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ με τα παράλληλα προς το $x + y + z = 0$ εφαπτόμενα επίπεδα της.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.
Έστω \mathbf{a}, \mathbf{b} δύο διαφορετικά σημεία του \mathbb{R}^2 και έστω $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t$, $t \in [0, 1]$, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα \mathbf{a} και \mathbf{b} . Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας δείξτε ότι υπάρχει $t_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η f είναι τοπικά σταθερή, δηλαδή για κάθε $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $\delta > 0$ (που εξαρτάται γενικά από το \mathbf{a}) ώστε $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Ορίζουμε $F = f \circ \mathbf{r}$. Τότε $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη συνεχής συνάρτηση. Από Θεώρημα Μέσης Τιμής για συναρτήσεις μιας μεταβλητής υπάρχει $t_0 \in (0, 1)$ ώστε

$$(1) \quad F(1) - F(0) = F'(t_0)$$

και από κανόνα αλυσίδας,

$$(2) \quad F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

για κάθε $t \in (0, 1)$.

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{r}(0)) - f(\mathbf{r}(1)) \\ &= F(1) - F(0) \\ &\stackrel{(1)}{=} F'(t_0) \\ &\stackrel{(2)}{=} \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$

(β) Αφού η f είναι τοπικά σταθερή οι μερικές παράγωγοι της f σε οποιοδήποτε σημείο (x_0, y_0) είναι και οι δύο μηδέν. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0 \end{aligned}$$

και όμοια για την $f_y(x_0, y_0)$.

Άρα $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και συνεπώς από το πρώτο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})$, για καθε \mathbf{a}, \mathbf{b} στο \mathbb{R}^2 .