

'Ασκηση 1 - Λύσεις

Πρόβλημα 1 [30 μονάδες] Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα τεκμηριώνοντας κάθε φορά τις απαντήσεις σας.

- (α') [5 μονάδες] Υποθέστε ότι δεν επιτρέπονται επαναλήψεις. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7, 8;
- (β') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') είναι μικρότεροι από 4000;
- (γ') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') είναι άρτιοι;
- (δ') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') είναι περιττοί;
- (ε') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') είναι πολλαπλάσια του 5;
- (ζ') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') περιέχουν τα ψηφία 3 και 5;

Λύση:

- (α') Εφ' όσον δεν έχουμε επαναλήψεις, έχουμε 6 επιλογές για το πρώτο ψηφίο, 5 για το δεύτερο, 4 για το τρίτο και 3 για το τέταρτο. Έτσι το πλήθος των αριθμών είναι

$$P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

- (β') Οι αριθμοί που είναι μικρότεροι από 4000 είναι εκείνοι που έχουν πρώτο ψηφίο το 1, το 2 ή το 3. Έτσι για το πρώτο ψηφίο έχουμε 3 επιλογές, ενώ για το δεύτερο, τρίτο και τέταρτο αντίστοιχα 5, 4, και 3 επιλογές. Κατά συνέπεια το πλήθος των αριθμών που είναι μικρότεροι από 4000 είναι: $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$.
- (γ') Οι αριθμοί που είναι άρτιοι είναι εκείνοι που το τελευταίο τους ψηφίο είναι το 2 ή το 8. Έτσι για το τελευταίο ψηφίο έχουμε 2 επιλογές. Για το πρώτο έχουμε 5 επιλογές (καθώς ήδη έχουμε επιλέξει κάποιον αριθμό για το τελευταίο ψηφίο), για το δεύτερο 4 επιλογές και για το τρίτο 3 επιλογές. Άρα το πλήθος των άρτιων αριθμών είναι: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.
- (δ') Υπάρχουν δύο τρόποι να υπολογίσουμε πλήθος των περιττών αριθμών. Ο πρώτος συνίσταται στο να συνειδητοποιήσουμε ότι οι περιττοί είναι οι αριθμοί εκείνοι που δεν είναι άρτιοι, και κατά συνέπεια το πλήθος τους είναι $360 - 120 = 240$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι οι περιττοί αριθμοί μπορούν να έχουν ως τελευταίο ψηφίο ένα εκ των 1, 3, 5 και 7, δηλαδή 4 επιλογές. Για το πρώτο ψηφίο μας μένουν 5 επιλογές, για το δεύτερο 4 και για το τρίτο 3. Έτσι το πλήθος των περιττών αριθμών είναι: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 240$.
- (ε') Ο μόνος τρόπος να είναι κάποιος από τους τετραψήφιους αριθμούς πολλαπλάσιο του 5 είναι το τελευταίο του ψηφίο να είναι το 5. Για τα υπόλοιπα τρία ψηφία έχουμε αντίστοιχα 5, 4, και 3 επιλογές. Κατά συνέπεια το πλήθος των αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 5 είναι: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
- (ζ') Ας υπερήσουμε ότι έχουμε καθορίσει τις θέσεις των ψηφίων 3 και 5 σε κάποιο τετραψήφιο αριθμό. Για τα υπόλοιπα 2 ψηφία έχουμε 4 και 3 επιλογές αντίστοιχα, καθώς εφ' όσον έχουμε επιλέξει το 3 και το 5 μας μένουν 4 επιλογές και όταν πλέον έχουμε επιλέξει ένα από τα υπολειπόμενα 4 ψηφία, μας μένουν 3 επιλογές. Άρα για κάθε καθορισμένη θέση των 3 και 5 έχουμε 12 αριθμούς. Αρκεί πλέον να μετρήσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε

τις θέσεις των 3 και 5 μεταξύ των τεσσάρων θέσεων. Το πλήθος των τρόπων αυτών είναι $P(4, 2)$ καθώς έχουμε 4 δυνατές θέσεις στις οποίες θέλουμε να βάλουμε δύο διαφορετικά ψηφία. Συνεπώς το πλήθος των αριθμών που περιέχουν τα ψηφία 3 και 5 είναι:

$$P(4, 2) \cdot 12 = 12 \cdot 12 = 144$$

□

Πρόβλημα 2 [25 μονάδες] Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα τεκμηριώνοντας κάθε φορά τις απαντήσεις σας.

- (α') [5 μονάδες] Έστω ένα σύνολο Σ η σημείων στο επίπεδο, τέτοια ώστε ανά τρία να μην είναι συνευθειακά. Πόσες διαφορετικές ευθείες ορίζουν τα σημεία του Σ ;
- (β') [10 μονάδες] Έστω ένα σύνολο Σ η σημείων στο επίπεδο ϵ των οποίων $k \geq 2$ βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία ℓ , ενώ τα υπόλοιπα δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή ($k < n$). Θα ονομάσουμε L το υποσύνολο των σημείων του Σ που βρίσκονται πάνω στην ℓ και F το σύνολο των υπολοίπων $n - k$ σημείων, δηλαδή, $F = \Sigma \setminus L$. Αν τα σημεία στο F είναι ανά τρία μη συνευθειακά, ενώ κάθε σημείο στο L δεν είναι συνευθειακό με οποιαδήποτε δύο σημεία στο F , να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών ευθειών που ορίζουν τα σημεία στο Σ .
- (γ') [10 μονάδες] Έστω ένα σύνολο Σ η σημείων στον τρισδιάστατο χώρο, ϵ των οποίων $k \geq 2$ βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία ℓ , ενώ τα υπόλοιπα δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή ($k < n$). Ονομάζουμε L το υποσύνολο του Σ που αποτελείται από τα σημεία επί της ℓ , και F το σύνολο των υπολοίπων σημείων, δηλαδή $F = \Sigma \setminus L$. Θεωρούμε ότι τα σημεία του F είναι ανά τρία μη συνευθειακά, και ανά τέσσερα μη συνεπίπεδα. Επίσης θεωρούμε ότι κάθε σημείο του L δεν είναι συνευθειακό με οποιαδήποτε δύο σημεία στο F και ότι δεν είναι συνεπίπεδο με οποιαδήποτε τρία σημεία στο F . Τέλος, θεωρούμε ότι οποιαδήποτε δύο σημεία του L δεν είναι συνεπίπεδα με οποιαδήποτε δύο σημεία του F . Με βάση τις παραπάνω θεωρήσεις, πόσα διαφορετικά επίπεδα ορίζουν τα n σημεία του Σ ;

Λύση:

- (α') Καθώς δεν έχουμε τριάδες συνευθειακών σημείων, κάθε ζεύγος σημείων ορίζει ακριβώς μία μοναδική ευθεία. Συνεπώς το πλήθος των ευθειών που ζητάμε είναι το πλήθος των (μη διατεταγμένων) ζευγών σημείων, δηλαδή:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- (β') Στην περίπτωση αυτή έχουμε τριών ειδών ευθείες. Ευθείες που ορίζουν σημεία του F , την ευθεία ℓ , και τέλος τις ευθείες που έχουν ένα σημείο επί της ℓ και ένα εκτός της ℓ (δηλαδή ορίζονται από ένα σημείο του L και ένα σημείο του F). Καθώς τα σημεία του F δεν έχουν συνευθειακές τριάδες, τα σημεία αυτά ορίζουν $\binom{n-k}{2}$ διαφορετικές ευθείες. Καθώς κάθε σημείο του L δεν είναι συνευθειακό με δύο σημεία του F , κάθε ζεύγος σημείων όπου το ένα είναι σημείο του F και το άλλο σημείο του L ορίζει μία μοναδική ευθεία. Το σύνολο αυτών των

ευθειών είναι το πλήθος τέτοιων ζευγών, δηλαδή $k(n - k)$. Συνεπώς το πλήθος των ευθειών που ψάχνουμε είναι:

$$\begin{aligned} \binom{n-k}{2} + k(n-k) + 1 &= \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + k(n-k) + 1 \\ &= \frac{(n-k)(n-k-1) + 2k(n-k)}{2} + 1 \\ &= \frac{(n-k)(n+k-1)}{2} + 1 \\ &= \frac{n^2 - k^2 - n + k}{2} + 1 \\ &= \frac{n(n-1) - k(k-1)}{2} + 1 \\ &= \binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1 \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι για $k = 2$, όταν δηλαδή η ευθεία ℓ έχει μόνο δύο σημεία οπότε και είμαστε στη γενική περίπτωση, η παραπάνω παράσταση μας δίνει ακριβώς το πλήθος των ευθειών που βρίκαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

(γ') Στην περίπτωση αυτή έχουμε τριών ειδών επίπεδα:

- (1) Επίπεδα που ορίζονται μόνο από σημεία του F .
- (2) Επίπεδα που ορίζονται από δύο σημεία του F και ένα σημείο του L .
- (3) Επίπεδα που ορίζονται από ένα σημείο του F και τα σημεία του L .

Παρατηρήστε ότι σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις τα επίπεδα που ορίζονται είναι μοναδικά, και ότι ένα επίπεδο ανήκει αποκλειστικά σε ακριβώς μία από τις παραπάνω κατηγορίες. Έτσι λοιπόν το πλήθος των επιπέδων τύπου (1) είναι ίσο με τις δυνατές (αδιάτακτες) τριάδες των $n - k$ σημείων, δηλαδή: $\binom{n-k}{3}$. Σε ότι αφορά τα επίπεδα τύπου (2), παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος σημείων στο F έχουμε k επίπεδα, ένα δηλαδή με κάθε σημείο του L . Επειδή το πλήθος των ζευγών στο F είναι $\binom{n-k}{2}$, καταλήγουμε ότι το πλήθος των επιπέδων τύπου (2) είναι $k \binom{n-k}{2}$. Τέλος, κάθε ένα από τα σημεία στο F μαζί με την ευθεία ℓ ορίζει ένα μοναδικό επίπεδο. Έτσι το πλήθος των διαφορετικών επιπέδων που φτιάχνουν τα σημεία στο F και το L είναι:

$$\begin{aligned} \binom{n-k}{3} + k \binom{n-k}{2} + n - k &= \frac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)}{6} + k \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + n - k \\ &= \frac{(n-k)(n-k-1)(n+2k-2)}{6} + n - k \\ &= \frac{n-k}{6} [(n-k-1)(n+2k-2) + 6] \\ &= \frac{n-k}{6} [(n-k+1)(n-k+2) + 3(k-2)(n-k-1)] \\ &= \frac{(n-k+2)(n-k+1)(n-k)}{6} + \frac{(k-2)(n-k-1)}{2} \end{aligned}$$

Το οποίο μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ίσο με:

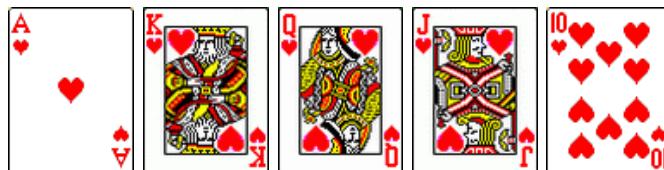
$$\binom{n}{3} - \binom{k}{3} + \left[1 - \binom{k}{2} \right] (n - k)$$

□

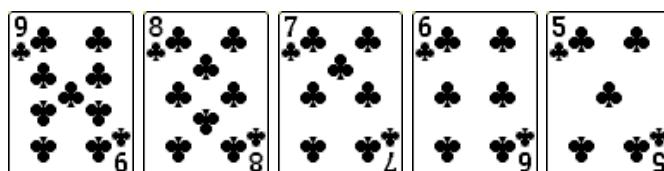
Πρόβλημα 3 [45 μονάδες] Το Πόκερ είναι ένα παιχνίδι που παίζεται με τα 52 φύλλα της τράπουλας (δηλαδή χωρίς τα Joker). Κάθε παίκτης έχει πέντε χαρτιά (το λεγόμενο «χέρι») και κερδίζει αναλόγως των πόσο «ισχυρά» είναι το φύλλα του.

Οι δυνάμεις των φύλλων περιγράφονται παρακάτω, από το ισχυρότερο στο ασθενέστερο. Αν με βάση τους παρακάτω ορισμούς κάποιο χέρι αντιστοιχεί σε παραπάνω από μία δύναμη, τότε λογιζεται ότι ανήκει στην ισχυρότερη δύναμη.

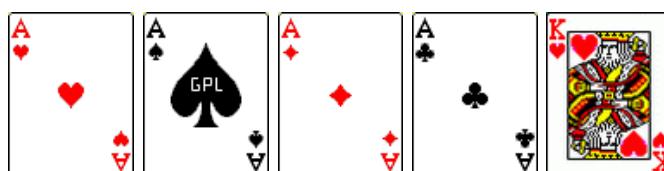
Royal flush Κέντα από δέκα στον áσσο και όλα τα χαρτιά του ίδιου συμβόλου. Π.χ.



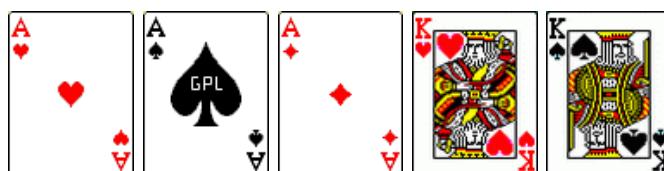
Κέντα χρώμα Οποιαδήποτε κέντα με όλα τα πέντε χαρτιά του ίδιου συμβόλου η οποία δεν είναι κέντα στον áσσο (δηλαδή κέντα που δεν είναι Royal flush). Π.χ.



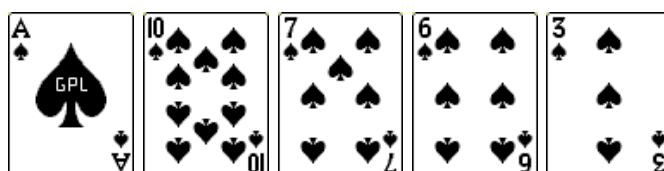
Καρέ Οποιαδήποτε τέσσερα χαρτιά του ίδιου είδους. Π.χ.



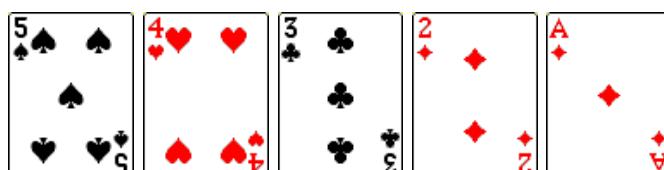
Φουλ Οποιαδήποτε τρία χαρτιά του ίδιου είδους μαζί με οποιαδήποτε δύο χαρτιά του ίδιου είδους. Στο παράδειγμα παρακάτω δείχνουμε το «Φουλ áσσων με ρηγάδες».



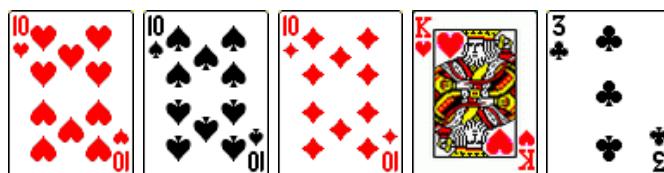
Χρώμα Οποιαδήποτε πέντε χαρτιά του ίδιου συμβόλου τα οποία δεν είναι συνεχόμενα. Π.χ.



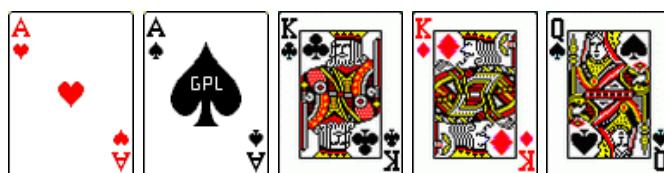
Κέντα Οποιαδήποτε πέντε συνεχόμενα χαρτιά με διαφορετικά σύμβολα. Π.χ.



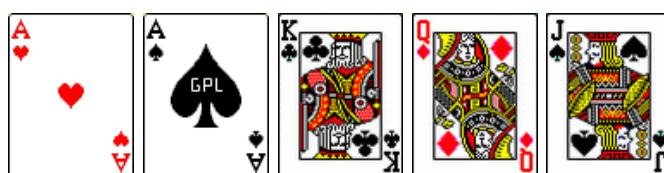
Τρία όμοια Οποιαδήποτε τρία χαρτιά του ίδιου είδους. Π.χ.



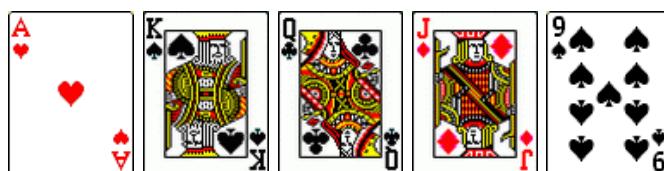
Δύο ζεύγη Οποιαδήποτε δύο χαρτιά του ίδιου είδους μαζί με άλλα δύο χαρτιά του ίδιου είδους αλλά διαφορετικό από το είδος των πρώτου ζευγαριού. Π.χ.



Ένα ζεύγος Οποιαδήποτε δύο χαρτιά του ίδιου είδους. Π.χ.

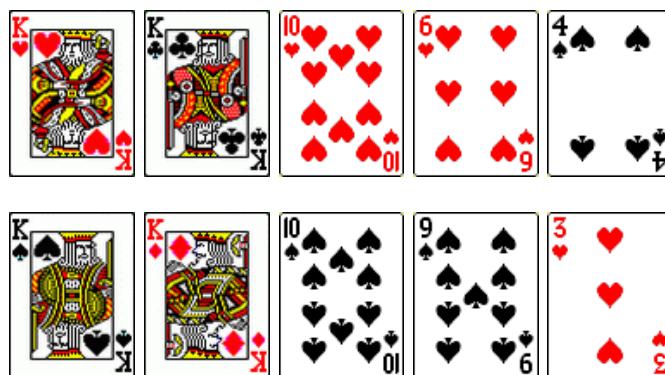


Μεγάλο φύλλο Οποιοδήποτε χέρι δεν έχει κάποιο από τους παραπάνω συνδυασμούς. Π.χ.



Στο παραπάνω παράδειγμα δείχνουμε το καλύτερο δυνατό «Μεγάλο φύλλο» που μπορεί να έχει κάποιος παίκτης. Υπάρχουν όμως και άλλα εξίσου καλύτερα μεγάλα φύλλα. Τα περί ισοδυναμίας χειριών εξηγούνται παρακάτω.

Σε ό,τι αφορά τα φύλλα αυτά καθαυτά, ο άστος (*A*) είναι ισχυρότερος όλων, μετά ακολουθεί ο ρηγάς (*K*), η ντάμα (*Q*), ο βαλές (*J*), το 10, το 9, το 8, κτλ., μέχρι το 2. Χαρτιά διαφορετικού συμβόλου θεωρούνται ισοδύναμα. Εποι παρά το γεγονός ότι σε καθένα από τα παρακάτω δύο χέρια έχουμε από ένα ζεύγος στο ρήγα, το δεύτερο χέρι είναι ισχυρότερο γιατί το τέταρτο φύλλο του (από αριστερά) είναι ισχυρότερο.

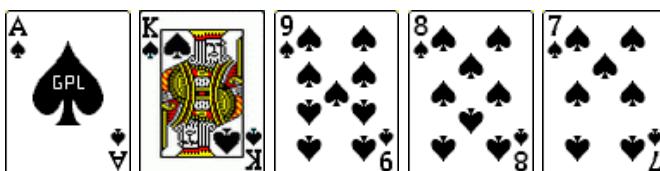


Αντίθετα τα δύο χέρια που φαίνονται παρακάτω είναι ισοδύναμα, και στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει νικητής.



Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας με σαφήνεια το τρόπο με τον οποίο βγάλατε το αποτέλεσμά σας. Θεωρούμε ότι η τράπουλα είναι καλά ανακατεμμένη και άρα όλες οι δυνατές διατάξεις των 52 χαρτιών είναι ισοπίθανες.

- (α') [7 μονάδες] Αν τραβήξετε 5 χαρτιά από την πλήρη τράπουλα, ποια η πιθανότητα να βγάλετε φουλ;
- (β') [5 μονάδες] Αν τραβήξετε 5 χαρτιά από την πλήρη τράπουλα, ποια η πιθανότητα να βγάλετε χρώμα;
- (γ') [8 μονάδες] Αν τραβήξετε 5 χαρτιά από την πλήρη τράπουλα, ποια η πιθανότητα να βγάλετε κέντα;
- (δ') [5 μονάδες] Αν τραβήξετε 5 χαρτιά από την πλήρη τράπουλα, ποια η πιθανότητα να βγάλετε τρία όμοια;
- (ε') [20 μονάδες] Παίζετε με κάποιον αντίπαλο. Τραβάτε πρώτος/η εσείς 5 χαρτιά και μετά ο αντίπαλος άλλα πέντα χαρτιά. Αν εσείς έχετε το παρακάτω χέρι (δηλαδή χρώμα στα μπαστούνια με άσσο, ρηγά, 9, 8 και 7), ποια η πιθανότητα ο αντίπαλός σας να έχει ισχυρότερο χέρι;



Σημείωση: Οι πιθανότητες του σας ζητείται να υπολογίσετε ερωτήματα (α')-(ε') παραπάνω πρέπει να παρουσιαστούν δύο μορφές: (1) ως ρητοί αριθμοί σε κλασματική μορφή (πρέπει να είναι ανάγωγο κλάσμα), και (2) ως αριθμοί κινητής υποδιαστολής με 6 σημαντικά ψηφία.

Λύση:

- (α') Για να βγάλουμε φουλ χρειαζόμαστε τρία χαρτιά από ένα είδος και δύο χαρτιά από κάποιο άλλο. Οι δυνατοί τρόποι να επιλέξουμε τα είδη χαρτιών είναι $13 \cdot 12$ καθώς έχουμε δεκατρείς επιλογές για το πρώτο και δώδεκα για το δεύτερο. Επειδή όμως υπάρχουν τέσσερα αντίγραφα κάθε είδους χαρτιού (τα τέσσερα διαφορετικά σύμβολα), υπάρχουν $\binom{4}{3} = 4$ τρόποι να διαλέξουμε τα τρία πρώτα χαρτιά και $\binom{4}{2} = 6$ τρόποι να διαλέξουμε τα δύο τελευταία. Κατά συνέπεια οι

συνδυασμοί πέντε χαρτιών που μας δίνουν φουλ είναι $\binom{4}{3} \cdot 13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 = 4 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 12 = 3744$. Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί πέντε χαρτιών είναι $\binom{52}{5} = 2598960$, οπότε και καταλήγουμε ότι η πιθανότητα $p_{φουλ}$ να βγάλουμε φουλ τραβώντας πέντε χαρτιά από την τράπουλα είναι:

$$p_{φουλ} = \frac{3744}{2598960} = \frac{6}{4165} \approx 0.00144058$$

(β') Χρώμα προκύπτει αν έχουμε πέντε χαρτιά του ίδιου συμβόλου που δε δίνουν ούτε Royal flush ούτε Κέντα χρώμα. Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε διαλέξει το σύμβολο, τότε ο αριθμός των πεντάδων από χαρτιά του συμβόλου αυτού είναι $\binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5!} = \frac{154440}{120} = 1287$. Από αυτές τις πεντάδες μία αντιστοιχεί στο Royal flush του συμβόλου μας, και άλλες εννέα πεντάδες σε κέντες χρώματα (είναι πεντάδες που έχουν μέγιστο χαρτί το ρηγά, τη ντάμα, τον βαλέ, το 10, το 9, το 8, το 7 και το 6, καθώς η πεντάδα από το 5 μέχρι τον άσσο – σύνολο εννέα πεντάδες). Έτσι πρέπει να τις αφαιρέσουμε από τις 1287, και έτσι το σύνολο των πεντάδων που μας δίνουν χρώμα ανά σύμβολο είναι 1277. Καθώς έχουμε τέσσερα χρώματα και δεδομένου ότι οι δυνατοί συνδυασμοί πέντε χαρτιών είναι $\binom{52}{5} = 2598960$, προκύπτει ότι η πιθανότητα $p_{χρώμα}$ να βγάλουμε χρώμα είναι:

$$p_{χρώμα} = 4 \frac{1277}{2598960} = \frac{5108}{2598960} = \frac{1277}{649740} \approx 0.00196540$$

(γ') Ας θεωρήσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε όλες τις κέντες με μέγιστο στοιχείο κάποιο 10. Προφανώς έχουμε τέσσερεις επιλογές για το 10, τέσσερεις επιλογές για το 9, τέσσερεις επιλογές για το 8, τέσσερεις επιλογές για το 7, και τέσσερεις επιλογές για το 6. Καθώς το τρόπος που επιλέξαμε τα πέντε χαρτιά δεν αποκλείει να έχουμε επιλέξει και τα πέντε του ίδιου συμβόλου (δηλαδή να έχουμε κάνει κέντα χρώμα), πρέπει να αφαιρέσουμε τις κέντες χρώματα που αντιστοιχούν, και οι οποίες είναι τέσσερεις (μία για κάθε σύμβολο). Έτσι ο συνολικός αριθμός των κεντών με μέγιστο στοιχείο το 10 είναι $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1020$. Καθώς υπάρχουν δέκα διαφορετικά δυνατά μέγιστα στοιχεία για να κάνουμε κέντα, προκύπτει ότι συνολικός αριθμός δυνατών κεντών είναι $10 \cdot 1020 = 10200$. Κατά συνέπεια η πιθανότητα $p_{κέντα}$ να βγάλουμε κέντα αν τραβήξουμε πέντε χαρτιά από την τράπουλα είναι:

$$p_{κέντα} = \frac{10200}{\binom{52}{5}} = \frac{10200}{2598960} = \frac{5}{1274} \approx 0.00392465$$

(δ') Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει το είδος χαρτιού που εμφανίζεται τρεις φορές. Τότε για τα υπόλοιπα δύο χαρτιά έχουμε $48 \cdot 44 / 2$ επιλογές, καθώς έχουμε σαρανταοκτώ επιλογές για το ένα (όλα τα χαρτιά μείον τα τέσσερα που αντιστοιχούν στο τριπλό χαρτί) και σαραντατέσσερεις επιλογές για το άλλο (όλα τα χαρτιά μείον τα τέσσερα που αντιστοιχούν στο τριπλό χαρτί και μείον τα τέσσερα του είδους του άλλου χαρτιού που επιλέξαμε). Τέλος, ο αριθμός των τριάδων που μπορούμε να φτιάξουμε με τα είδος του χαρτιού που επιλέξαμε είναι $\binom{4}{3} = 4$, και φυσικά έχουμε δεκατρία διαφορετικά είδη χαρτιών. Έτσι ο αριθμός των πεντάδων της τράπουλας που μας δίνουν τρίαν ομοία είναι $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{48 \cdot 44}{2} = 54912$. Κατά συνέπεια η πιθανότητα $p_{τρία \; ομοία}$ να βγάλουμε τρία ομοία αν διαλέξουμε τρία χαρτιά από την τράπουλα είναι:

$$p_{τρία \; ομοία} = \frac{54912}{\binom{52}{5}} = \frac{54912}{2598960} = \frac{88}{4165} \approx 0.0211285$$

(ε') Για να έχει ο αντίπαλός μας καλύτερο χέρι πρέπει να συμβεί ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα

1. Να έχει Royal flush.
2. Να έχει κέντα χρώμα.
3. Να έχει καρέ.
4. Να έχει φουλ.
5. Να έχει χρώμα, αλλά καλύτερο από το δικό μας.

Δεδομένου ότι έχουμε ήδη πάρει πέντε χαρτιά από την τράπουλα, ο αντίπαλός μας έχει μόνο σαρανταεπτά χαρτιά από τα οποία σχηματίζει το χέρι του. Ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών των χαρτιών του αντιπάλου, ή αλλιώς ο αριθμός των δυνατών χεριών του αντιπάλου είναι $\binom{47}{5} = \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{5!} = 1533939$. Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα καθενός από τα παραπάνω ενδεχόμενα.

Καθώς εμείς έχουμε έναν από τους τέσσερεις άσσους, ο αντίπαλος μπορεί να κάνει Royal flush μόνο με τα σπαθιά, τις κούπες τα καρό. Κατά συνέπεια μόνο τρεις από τις 1533939 πεντάδες μπορούν να δώσουν Royal flush, και έτσι η πιθανότητα $\pi_{Royal\ flush}$ ο αντίπαλος να έχει Royal flush είναι:

$$\pi_{Royal\ flush} = \frac{3}{1533939} = \frac{1}{511313} \approx 1.95575 \cdot 10^{-6}$$

Από τις τριανταέξι δυνατές κέντες χρώματα που μπορεί κάποιος να έχει διαλέγοντας πέντε χαρτιά από την τράπουλα ο αντίπαλός μας έχει τη δυνατότητα να έχει μόνο τις εικοσιοκτώ. Αυτό γιατί λόγω του ότι έχουμε εμείς τον άσσο, το ρηγά, το 9, το 7 και το 8 των μπαστουνιών, ο αντίπαλος δεν μπορεί να έχει κέντα χρώμα μπαστουνιών στον ρηγά, τη ντάμα, το βαλέ, το 10, το 9, το 8, το 7 και το 5. Με άλλα λόγια τα χαρτιά μας αποκλείουν ότι μπορεί να κάνει οκτώ από τις τριανταέξι δυνατές κέντες χρώματα. Έτσι η πιθανότητα $\pi_{κέντα\ χρώμα}$ να έχει ο αντίπαλός μας κέντα χρώμα είναι:

$$\pi_{κέντα\ χρώμα} = \frac{28}{1533939} \approx 1.82537 \cdot 10^{-5}$$

Δεδομένου ότι έχουμε τον άσσο, το ρηγά, το 9, το 8 και το 7 των μπαστουνιών, ο αντίπαλός μας μπορεί να κάνει μόνο καρέ με ντάμες, βαλέδες, 10άρια, 6άρια, 5άρια, 4άρια, 3άρια και 2άρια, δηλαδή με οκτώ διαφορετικά είδη χαρτιών. Τα δυνατά καρέ, αν έχουμε επιλέξει ένα από τα οκτώ παραπάνω είδη, είναι σαραντατρία, καθώς τόσα χαρτιά έχουν απομείνει στην τράπουλα αν αφαιρέσουμε τα πέντε δικά μας και τα τέσσερα του καρέ. Έτσι ο συνολικός αριθμός των δυνατών καρέ που μπορεί να κάνει ο αντίπαλος είναι $43 \cdot 8 = 344$, και άρα η πιθανότητα $\pi_{καρέ}$ να έχει ο αντίπαλός μας καρέ είναι:

$$\pi_{καρέ} = \frac{344}{1533939} = \frac{8}{35673} \approx 0.000224259$$

Για να έχει ο αντίπαλός μας φουλ πρέπει να έχει τρία χαρτιά του ίδιου είδους και άλλα δύο κάποιου άλλου είδους. Διαχωρίζουμε τα δυνατά χαρτιά του αντιπάλου στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Τα δύο είδη χαρτιών του αντιπάλου είναι είδη που δεν έχουμε στο δικό μας χέρι. Με άλλα λόγια τα είδη των χαρτιών του αντιπάλου είναι ντάμες ή βαλέδες ή 10άρια ή 6άρια ή 5άρια ή 4άρια ή 3άρια ή 2άρια, δηλαδή οκτώ διαφορετικά είδη χαρτιών. Από τα οκτώ αυτά είδη θέλουμε να διαλέξουμε δύο. Πιο συγκεκριμένα έχουμε οκτώ επιλογές για το ένα φύλλο και επτά επιλογές για το άλλο. Καθώς και τα τέσσερα χαρτιά αυτών των ειδών

βρίσκονται στην τράπουλα και όχι στο χέρι μας, ο αντίπαλος μπορεί να σχηματίσει τριάδα από ένα είδος με $\binom{4}{3}$ διαφορετικούς τρόπους και δυάδα από ένα είδος με $\binom{4}{2}$ διαφορετικούς τρόπους. Συνεπώς αν ο αντίπαλος έχει φουλ με χαρτιά που δεν έχουμε στο χέρι μας, το πλήθος αυτών των φουλ είναι: $8 \cdot 7 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 56 \cdot 4 \cdot 6 = 1344$.

2. Τα δύο είδη χαρτιών του αντιπάλου είναι είδη που έχουμε στο χέρι μας. Με άλλα λόγια τα είδη χαρτιών του αντιπάλου είναι άσσοι ή ρηγάδες ή 9άρια ή 8άρια ή 7άρια, δηλαδή 5 διαφορετικά είδη χαρτιών. Από τα πέντε αυτά είδη θέλουμε να διαλέξουμε δύο, όποτε έχουμε πέντε επιλογές για το ένα και τέσσερις επιλογές για το δεύτερο. Καθώς εμείς έχουμε στο χέρι μας ένα από τα τέσσερα δυνατά φύλλα των ειδών με τα οποία ο αντίπαλος κάνει φουλ, προκύπτει ότι ο αντίπαλος μπορεί να σχηματίσει τριάδα με $\binom{3}{3} = 1$ διαφορετικούς τρόπους και δυάδα με $\binom{3}{2} = 3$ διαφορετικούς τρόπους. Συνεπώς αν ο αντίπαλος έχει φουλ με χαρτιά που έχουμε στο χέρι μας, το πλήθος αυτών των φουλ είναι: $5 \cdot 4 \cdot \binom{3}{3} \cdot \binom{3}{2} = 20 \cdot 1 \cdot 3 = 60$.
3. Το τριπλό χαρτί του αντιπάλου είναι ένα από τα είδη που έχουμε στο χέρι μας ενώ το διπλό δεν είναι ένα από αυτά. Για το τριπλό φύλλο υπάρχουν πέντε επιλογές και καθώς εμείς έχουμε το ένα από τα τέσσερα του είδους, ο αντίπαλος μπορεί να κάνει τριάδα με 1 μόνο τρόπο. Για το διπλό φύλλο έχουμε οκτώ επιλογές και καθώς και τα τέσσερα του είδους υπάρχουν στην τράπουλα, ο αντίπαλος μπορεί να κάνει δυάδα με $\binom{4}{2} = 6$ διαφορετικούς τρόπους. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι στην περίπτωση αυτή το πλήθος των φουλ που μπορεί να κάνει ο αντίπαλος είναι $5 \cdot \binom{3}{3} \cdot 8 \cdot \binom{4}{2} = 5 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 6 = 240$.
4. Το διπλό χαρτί του αντιπάλου είναι ένα από τα είδη που έχουμε στο χέρι μας ενώ το τριπλό δεν είναι ένα από αυτά. Για το διπλό φύλλο υπάρχουν πέντε επιλογές και καθώς εμείς έχουμε το ένα από τα τέσσερα του είδους, ο αντίπαλος μπορεί να κάνει τριάδα με $\binom{3}{2} = 3$ τρόπους. Για το διπλό φύλλο έχουμε οκτώ επιλογές και καθώς και τα τέσσερα του είδους υπάρχουν στην τράπουλα, ο αντίπαλος μπορεί να κάνει τριάδα με $\binom{4}{3} = 4$ διαφορετικούς τρόπους. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι στην περίπτωση αυτή το πλήθος των φουλ που μπορεί να κάνει ο αντίπαλος είναι $5 \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 \cdot \binom{4}{3} = 5 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 4 = 480$.

Συνοψίζοντας την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι το πλήθος των δυνατών φουλ του αντιπάλου είναι $1344 + 60 + 240 + 480 = 2124$, το οποίο σημαίνει ότι η πιθανότητα ο αντίπαλος να έχει φουλ είναι:

$$\pi_{\text{φουλ}} = \frac{2124}{1533939} = \frac{708}{511313}$$

Τέλος εξετάζουμε την περίπτωση ο αντίπαλος να έχει χρώμα, αλλά ισχυρότερο από το δικό μας. Επειδή δεν υπάρχει χρώμα στα μπαστούνια ισχυρότερο από τι δικό μας, ο αντίπαλος πρέπει να έχει αναγκαστικά χρώμα στα καρά, σπαθιά ή κούπες. Πιο συγκεκριμένα για να συμβεί αυτό πρέπει ο αντίπαλός μας να έχει άσσο, ρηγά και αναγκαστικά ένα εκ των ντάμα, βαλέ ή 10 του αντιστοίχου χρώματος (κάθε άλλο χρώμα είναι ισότιμο ή ασθενέστερο σε σχέση με το δικό μας). Τα χρώματα ενός συμβόλου που έχουν άσσο, ρήγα και ντάμα ως το τρίτο καλύτερο φύλλο είναι $\binom{10}{2} - 1$, καθώς έχουμε $\binom{10}{2}$ επιλογές για τα υπολοιπόμενα δύο φύλλα και πρέπει να αφαιρέσουμε το Royal flush που μπορεί να προκύψει αν τα άλλα δύο φύλλα είναι βαλές και 10. Τα χρώματα ενός συμβόλου που έχουν άσσο, ρήγα και βαλέ ως το τρίτο καλύτερο φύλλο είναι $\binom{9}{2}$, καθώς τα δύο τελευταία φύλλα είναι δύο εκ των 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 και 2. Τέλος, τα χρώματα ενός συμβόλου που έχουν άσσο, ρήγα και 10 ως το τρίτο καλύτερο φύλλο είναι $\binom{8}{2}$, καθώς τα δύο υελευταία φύλλα είναι δύο εκ των 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 και 2. Άρα τα δυνατά χρώματα ενός συμβόλου που είναι καλύτερα από τα δικά μας είναι $\binom{10}{2} + \binom{9}{2} + \binom{8}{2} - 1 = 45 + 36 + 28 - 1 = 108$. Δεδομένου ότι ο αντίπαλος μπορεί να έχει χρώμα

σε οποιοδήποτε σύμβολο εκτός των μπαστούνιών, προκύπτει ότι η πιθανότητα $\pi_{καλύτερο χρώμα}$ να έχει ο αντίπαλός μας καλύτερο χρώμα είναι:

$$\pi_{καλύτερο χρώμα} = 3 \cdot \frac{108}{1533939} = \frac{108}{511313} \approx 0.000211221$$

Συνοψίζοντας, η πιθανότητα $\pi_{καλύτερο χέρι}$ ο αντίπαλός μας να έχει καλύτερο χέρι είναι το άνθροισμα των επί μέρους πιθανοτήτων που υπολογίσαμε παραπάνω, δηλαδή:

$$\begin{aligned}\pi_{καλύτερο χέρι} &= \pi_{Royal flush} + \pi_{κέντα χρώμα} + \pi_{καρέ} + \pi_{φουλ} + \pi_{καλύτερο χρώμα} \\ &= \frac{1}{511313} + \frac{28}{1533939} + \frac{8}{35673} + \frac{708}{511313} + \frac{108}{511313} \\ &= \frac{941}{511313} \\ &\approx 0.00184036\end{aligned}$$

□

Πρόβλημα 4 [80 μονάδες] Κατασκευάστε μια γραμματική δομής γλώσσας για κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες. Τεκμηριώστε τις κατασκευές σας.

- (α') [10 μονάδες] $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ και } \epsilon \text{τε} i = j \text{ ή } j = k, \text{ αλλά όχι και τα δύο}\}$
- (β') [20 μονάδες] $L_2 = \{a, b, c\}^* \setminus \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$
- (γ') [15 μονάδες] $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \eta w \text{ έχει τριπλάσια } a \text{ απ' ότι } b\}$
- (δ') [15 μονάδες] $L_4 = \{w \# x \mid w, x \in \{0, 1\}^*\text{ και } \eta \text{ λέξη } w^R \text{ είναι μια υπολέξη}^\dagger \text{ της } x\}$
- (ε') [20 μονάδες] $L_5 = \{x_1 \# x_2 \# \dots \# x_k \mid k \geq 1, \forall i, x_i \in \{a, b\}^*, \text{ και για κάποια } i \text{ και } j, x_i = x_j^R\}$

Λύση:

(α') Η γλώσσα L_1 μπορεί να γραφεί ως η ένωση των παρακάτω τεσσάρων γλωσσών:

$$\begin{aligned} L_{1,1} &= \{a^i b^i c^j \mid i > j \geq 0\} \\ L_{1,2} &= \{a^i b^i c^j \mid j > i \geq 0\} \\ L_{1,3} &= \{a^i b^j c^j \mid i > j \geq 0\} \\ L_{1,4} &= \{a^i b^j c^j \mid j > i \geq 0\} \end{aligned}$$

Θα δώσουμε γραμματικές που παράγουν κάθε μία από τις παραπάνω γλώσσες. Παρατηρήστε ότι οι παρακάτω γραμματικές είναι τύπου-1 και όχι τύπου-2. Μπορούμε μάλιστα να αποδείξουμε ότι δεν είναι δυνατόν να παραχθούν οι γλώσσες αυτές με γραμματικές τύπου-2, αλλά αυτό είναι εκτός του αντικειμένου του μαθήματος.

Για τη γλώσσα $L_{1,1}$ έχουμε λοιπόν την παρακάτω γλώσσα, της οποίας το αρχικό σύμβολο είναι το S_1 :

$$\begin{aligned} S_1 &\rightarrow A_1, \quad A_1 \rightarrow aA_1b, \quad A_1 \rightarrow ab, \\ S_1 &\rightarrow B_1 T_1 C_1, \quad T_1 \rightarrow B_1 T_1 C_1, \quad T_1 \rightarrow B_1 B_1 c, \quad C_1 \rightarrow c, \quad C_1 \rightarrow \varepsilon, \\ B_1 &\rightarrow aD_1b, \quad D_1ba \rightarrow aD_1b, \quad D_1bb \rightarrow bD_1b, \quad D_1bc \rightarrow bE_1c, \quad E_1 \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Οι πρώτες τρεις παραγωγές της παραπάνω γραμματικής δημιουργούν όλες τις λέξεις της μορφής $a^i b^i$, $i \geq 1$, δηλαδή όλες της λέξεις της γλώσσας με μηδέν γράμματα c . Οι υπόλοιπες παραγωγές δημιουργούν όλες της λέξεις της γλώσσας που έχουν τουλάχιστον ένα c . Πιο συγκεκριμένα, οι παραγωγές $S_1 \rightarrow B_1 T_1 C_1$, $T_1 \rightarrow B_1 T_1 C_1$ και $T_1 \rightarrow B_1 B_1 c$ μας δίνουν ακολουθίες μη τερματικών και τερματικών συμβόλων της μορφής $(B_1)^i c (C_1)^j$, όπου $i = j - 2$. Τα C_1 μας δίνουν το πολύ ένα γράμμα c το χαθένα, οπότε προκύπτει τελικά ότι οι τρεις παραγωγές $S_1 \rightarrow B_1 T_1 C_1$, $T_1 \rightarrow B_1 T_1 C_1$ και $T_1 \rightarrow B_1 B_1 c$ μας δίνουν ακολουθίες τερματικών και μη τερματικών συμβόλων της μορφής $(B_1)^i c^j$, όπου $i \geq j - 1$. Χρησιμοποιώντας την παραγωγή $B_1 \rightarrow aD_1b$ μπορούμε να πάμε ένα βήμα προπάρερα και να παρατηρήσουμε ότι οι ακολουθίες που παράγουμε της μορφής $(aD_1b)^i c^j$, όπου $i > j$. Θα είχαμε σχεδόν τελειώσει, αλλά υπάρχει το πρόβλημα ότι όλα τα a δεν είναι πριν από όλα τα b . Οι τρεις παραγωγές $D_1ba \rightarrow aD_1b$, $D_1bb \rightarrow bD_1b$ και $D_1bc \rightarrow bE_1c$ είναι υπεύθυνες για να αποκαταστήσουν αυτό το πρόβλημα, καθώς αυτό που κάνουν είναι ότι σπρώχνουν τα D_1 προς τα γράμματα c . Χρησιμοποιώντας αυτές τις παραγωγές η ακολουθία $(aD_1b)^i c^j$ μετατρέπεται στην ακολουθία $a^i b^i (E_1)^j c^j$. Χρησιμοποιώντας την παραγωγή $E_1 \rightarrow \varepsilon$, η τελευταία ακολουθία μας δίνει την

[†]Μία λέξη w είναι υπολέξη μιας λέξης v , αν υπάρχουν λέξεις v_1 και v_2 , τέτοιες ώστε w να μπορεί να γραφεί ως $w = v_1uv_2$. Οι v_1 και v_2 είναι δυνατόν να είναι η κενή λέξη ε .

ακολουθία τερματικών συμβόλων $a^i b^j c^j$, με $i > j > 0$, δηλαδή όλες τις λέξεις της γλώσσας που δεν μας έδωσαν οι τρεις πρώτες παραγωγές.

Με αντίστοιχο τρόπο και λογική κατασκευάζουμε τις γραμματικές για τις άλλες τρεις γλώσσες. Ήπιο συγκεκριμένα η γραμματική για τη γλώσσα $L_{1,2}$ είναι (το αρχικό σύμβολο είναι το S_2):

$$\begin{aligned} S_2 \rightarrow A_2, \quad A_2 \rightarrow cA_2, \quad A_2 \rightarrow c, \\ S_2 \rightarrow B_2 T_2 C_2, \quad T_2 \rightarrow B_2 T_2 C_2, \quad T_2 \rightarrow B_2 cc, \quad C_2 \rightarrow cC_2, \quad C_2 \rightarrow c, \\ B_2 \rightarrow aD_2 b, \quad D_2 ba \rightarrow aD_2 b, \quad D_2 bb \rightarrow bD_2 b, \quad D_2 bc \rightarrow bE_2 c, \quad E_2 \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Στην περίπτωση της παραπάνω γραμματικές οι τρεις πρώτες παραγωγές μας δίνουν όλες τις λέξεις της μορφής c^i , $i \geq 1$, δηλαδή όλες τις λέξεις της γλώσσας $L_{1,2}$ που δεν περιέχουν τα γράμματα a και b . Οι υπόλοιπες παραγωγές δίνουν όλες τις λέξεις της γλώσσας που περιέχουν τουλάχιστον ένα a και b . Ήπιο συγκεκριμένα οι παραγωγές $S_2 \rightarrow B_2 T_2 C_2$, $T_2 \rightarrow B_2 T_2 C_2$ και $T_2 \rightarrow B_2 cc$ μας δίνουν ακολουθίες τερματικών και μη τερματικών συμβόλων της μορφής $(B_2)^i c^2 (C_2)^j$, όπου $j \geq i - 1$, και εν συνεχείᾳ με τη βοήθεια των παραγωγών $C_2 \rightarrow cC_2$ και $C_2 \rightarrow c$ οι ακολουθίες αυτές γίνονται $(B_2)^i c^j$, όπου $j > i > 0$. Συνέχεια με τη βοήθεια της παραγωγής $B_2 \rightarrow aD_2 b$ παίρνουμε τις ακολουθίες $(aD_2 b)^i c^j$, $j > i > 0$, ενώ τη βοήθεια των παραγωγών $D_2 ba \rightarrow aD_2 b$, $D_2 bb \rightarrow bD_2 b$ και $D_2 bc \rightarrow bE_2 c$, οι ακολουθίες αυτές μετατρέπονται στις ακολουθίες $a^i b^j (E_2)^i c^j$, $j > i > 0$. Οι τελευταίες, χρησιμοποιώντας την τελευταία παραγωγή της γραμματικής μας δίνουν τις ακολουθίες τερματικών συμβόλων $a^i b^i c^j$, $j > i > 0$, δηλαδή όλες τις λέξεις της γλώσσας που περιέχουν τουλάχιστον ένα a και b .

Με την ίδια λογική κατασκευάζουμε τη γραμματική για τη γλώσσα $L_{1,3}$ η οποία φαίνεται παρακάτω (αρχικό σύμβολο το S_3):

$$\begin{aligned} S_3 \rightarrow A_3, \quad A_3 \rightarrow aA_3, \quad A_3 \rightarrow a, \\ S_3 \rightarrow F_3 T_3 G_3, \quad T_3 \rightarrow F_3 T_3 G_3, \quad T_3 \rightarrow aaG_3, \quad F_3 \rightarrow aF_3, \quad F_3 \rightarrow a, \\ G_3 \rightarrow bH_3 c, \quad cbH_3 \rightarrow bH_3 c, \quad bbH_3 \rightarrow bH_3 b, \quad abH_3 \rightarrow aE_3 b, \quad E_3 \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

καθώς και για τη γλώσσα $L_{1,4}$ η οποία παρατίθεται παρακάτω (αρχικό σύμβολο το S_4):

$$\begin{aligned} S_4 \rightarrow A_4, \quad A_4 \rightarrow bA_4 c, \quad A_4 \rightarrow bc, \\ S_4 \rightarrow F_4 T_4 G_4, \quad T_4 \rightarrow F_4 T_4 G_4, \quad T_4 \rightarrow aG_4 G_4, \quad F_4 \rightarrow a, \quad F_4 \rightarrow \varepsilon, \\ G_4 \rightarrow bH_4 c, \quad cbH_4 \rightarrow bH_4 c, \quad bbH_4 \rightarrow bH_4 b, \quad abH_4 \rightarrow aE_4 b, \quad E_4 \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Για να καταστευάσουμε τη γραμματική για τη γλώσσα L_1 αρκεί να εισάγουμε ένα καινούργιο μη τερματικό σύμβολο, το S , το οποίο θα είναι και το αρχικό σύμβολο της γραμματικής. Το σύνολο των παραγωγών της γραμματικής είναι οι παραγωγές που αντιστοιχούν στις γραμματικές για τις τέσσερεις γλώσσες $L_{1,i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, μαζί με τις παρακάτω τέσσερεις παραγωγές:

$$S \rightarrow S_1, \quad S \rightarrow S_2, \quad S \rightarrow S_3, \quad S \rightarrow S_4$$

Αν συγκεντρώσουμε όλες τις παραπάνω παραγωγές, και απαλείψουμε παραγωγές που εμφανίζονται δύο φορές έχοντας το ίδιο αποτέλεσμα ως προς την παραγωγή λέξεων της γλώσσας,

προκύπτει η παρακάτω γραμματική, με αρχικό σύμβολο το S :

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow S_1, & S &\rightarrow S_2, & S &\rightarrow S_3, & S &\rightarrow S_4, \\
 S_1 &\rightarrow A_1, & A_1 &\rightarrow aA_1b, & A_1 &\rightarrow ab, \\
 S_2 &\rightarrow A_2, & A_2 &\rightarrow cA_2, & A_2 &\rightarrow c, \\
 S_3 &\rightarrow A_3, & A_3 &\rightarrow aA_3, & A_3 &\rightarrow a, \\
 S_4 &\rightarrow A_4, & A_4 &\rightarrow bA_4c, & A_4 &\rightarrow bc, \\
 S_1 &\rightarrow BT_1C_1, & T_1 &\rightarrow BT_1C_1, & T_1 &\rightarrow BBc, \\
 S_2 &\rightarrow BT_2C_2, & T_2 &\rightarrow BT_2C_2, & T_2 &\rightarrow Bcc, \\
 S_3 &\rightarrow F_3T_3G, & T_3 &\rightarrow F_3T_3G, & T_3 &\rightarrow aaG, \\
 S_4 &\rightarrow F_4T_4G, & T_4 &\rightarrow F_4T_4G, & T_4 &\rightarrow aGG, \\
 C_1 &\rightarrow c, & C_1 &\rightarrow \varepsilon, & C_2 &\rightarrow cC_2, & C_2 &\rightarrow c, \\
 F_3 &\rightarrow aF_3, & F_3 &\rightarrow a, & F_4 &\rightarrow a, & F_4 &\rightarrow \varepsilon, \\
 B &\rightarrow aDb, & Dba &\rightarrow aDb, & Dbb &\rightarrow bDb, & Dbc &\rightarrow bEc, \\
 G &\rightarrow bHc, & cbH &\rightarrow bHc, & bbH &\rightarrow bHb, & abH &\rightarrow aEb, \\
 E &\rightarrow \varepsilon
 \end{aligned}$$

- (β') Κατ' αρχήν ωρα περιγράψουμε τις ειδους λέξεις υπάρχουν στη γλώσσα L_2 . Προφανώς υπάρχουν όλες οι λέξεις που έχουν μόνο δύο εκ των τριών γραμμάτων a , b και c , καθώς και η κενή λέξη ε . Επίσης υπάρχουν όλες οι λέξεις που περιέχουν και τα τρία γράμματα, αλλά όχι στη σωστή σειρά, δηλαδή περιέχουν ένα b πριν από ένα a , ή ένα c πριν από ένα a ή ένα b . Τέλος, η γλώσσα L_2 περιέχει όλες τις λέξεις που έχουν τα a , b και c στη σωστή σειρά, αλλά ο αριθμός τους δεν είναι ίδιος. Πιο φορμαλιστικά μπορούμε να γράψουμε την L_2 ως ένωση των γλωσσών $L_{2,i}$, $i = 1, \dots, 8$, όπου

$$\begin{aligned}
 L_{2,1} &= \{a, b\}^* \\
 L_{2,2} &= \{a, c\}^* \\
 L_{2,3} &= \{b, c\}^* \\
 L_{2,4} &= \{ubvaw \mid u, v, w \in \{a, b, c\}^*\} \\
 L_{2,5} &= \{ucvaw \mid u, v, w \in \{a, b, c\}^*\} \\
 L_{2,6} &= \{ucvbw \mid u, v, w \in \{a, b, c\}^*\} \\
 L_{2,7} &= \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1 \text{ και } i \neq j\} \\
 L_{2,8} &= \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1 \text{ και } j \neq k\}
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε γραμματικές δομής φράσης για κάθε μία από τις παραπάνω γλώσσες. Θα ονομάσουμε Γ_i τη γραμματική που αντιστοιχεί στη γλώσσα $L_{2,i}$. Αντίστοιχα το αρχικό σύμβολο για κάθε γλώσσα θα είναι το S_i .

Η γραμματική δομής φράσης για τις τρεις πρώτες γλώσσες είναι πολύ απλές:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 : \quad S_1 &\rightarrow aS_1, & S_1 &\rightarrow bS_1, & S_1 &\rightarrow \varepsilon \\
 \Gamma_2 : \quad S_2 &\rightarrow aS_2, & S_2 &\rightarrow cS_2, & S_2 &\rightarrow \varepsilon \\
 \Gamma_3 : \quad S_3 &\rightarrow bS_3, & S_3 &\rightarrow cS_3, & S_3 &\rightarrow \varepsilon
 \end{aligned}$$

Πολύ απλές είναι και οι γραμματικές για τις επόμενες τρεις γλώσσες.

$$\begin{aligned}\Gamma_4 : \quad S_4 &\rightarrow U\mathbf{b}U\mathbf{a}U, \quad U \rightarrow \mathbf{a}U, \quad U \rightarrow \mathbf{b}U, \quad U \rightarrow \mathbf{c}U, \quad U \rightarrow \varepsilon \\ \Gamma_5 : \quad S_5 &\rightarrow V\mathbf{c}V\mathbf{a}V, \quad V \rightarrow \mathbf{a}V, \quad V \rightarrow \mathbf{b}V, \quad V \rightarrow \mathbf{c}V, \quad V \rightarrow \varepsilon \\ \Gamma_6 : \quad S_6 &\rightarrow W\mathbf{c}W\mathbf{b}W, \quad W \rightarrow \mathbf{a}W, \quad W \rightarrow \mathbf{b}W, \quad W \rightarrow \mathbf{c}W, \quad W \rightarrow \varepsilon\end{aligned}$$

Η γλώσσα $L_{2,7}$ αναλύεται περαιτέρω στις γλώσσες $L_{2,7,1}$ και $L_{2,7,2}$ όπου

$$L_{2,7,1} = \{\mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^k \mid i, j, k \geq 1 \text{ και } i > j\}, \quad L_{2,7,2} = \{\mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^k \mid i, j, k \geq 1 \text{ και } i < j\}$$

Πλέον είναι εύκολο για γράψουμε μια γραμματική δομής γλώσσας για τις καθεμία από τις παραπάνω γλώσσες, και πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$\begin{aligned}\Gamma_{7,1} : \quad S_{7,1} &\rightarrow A_1C_1, \quad A_1 \rightarrow \mathbf{a}A_1\mathbf{b}, \quad A_1 \rightarrow \mathbf{a}B_1\mathbf{b}, \quad B_1 \rightarrow \mathbf{a}B_1, \quad B_1 \rightarrow \mathbf{a}, \quad C_1 \rightarrow \mathbf{c}C_1, \quad C_1 \rightarrow \mathbf{c} \\ \Gamma_{7,2} : \quad S_{7,2} &\rightarrow A_2C_2, \quad A_2 \rightarrow \mathbf{a}A_2\mathbf{b}, \quad A_2 \rightarrow \mathbf{a}B_2\mathbf{b}, \quad B_2 \rightarrow \mathbf{b}B_2, \quad B_2 \rightarrow \mathbf{b}, \quad C_2 \rightarrow \mathbf{c}C_2, \quad C_2 \rightarrow \mathbf{c}\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω γραμματικές προκύπτει η παραχάτω γραμματική Γ_7 για τη γλώσσα $L_{2,7}$:

$$\begin{aligned}\Gamma_7 : \quad S_7 &\rightarrow AB, \quad A \rightarrow \mathbf{a}Ab, \quad A \rightarrow \mathbf{a}Cb, \quad A \rightarrow \mathbf{a}Db, \quad C \rightarrow \mathbf{a}C, \quad C \rightarrow \mathbf{a}, \\ &\quad D \rightarrow \mathbf{b}D, \quad D \rightarrow \mathbf{b}, \quad B \rightarrow \mathbf{c}B, \quad B \rightarrow \mathbf{c}\end{aligned}$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο κατασκευάζουμε τη γραμματική Γ_8 και για τη γλώσσα $L_{2,8}$:

$$\begin{aligned}\Gamma_8 : \quad S_8 &\rightarrow EF, \quad E \rightarrow \mathbf{a}E, \quad E \rightarrow \mathbf{a}, \quad F \rightarrow \mathbf{b}Fc, \quad F \rightarrow \mathbf{b}Gc, \quad F \rightarrow \mathbf{b}Hc, \\ &\quad G \rightarrow \mathbf{b}G, \quad G \rightarrow \mathbf{b}, \quad H \rightarrow \mathbf{c}H, \quad H \rightarrow \mathbf{c}\end{aligned}$$

Πλέον δεν έχουμε παρά να συνδυάσουμε τις παραπάνω γραμματικές, για να πάρουμε τη γραμματική Γ της γλώσσας L_2 . Η γραμματική Γ δίδεται παραχάτω, όπου και συγκεράσαμε κάποιες παραγωγές/μη τερματικά διοτί μπορούσαμε να τις αντικαταστήσουμε με άλλες παραγωγές και μη τερματικά σύμβολα που υπήρχαν σε άλλες γλώσσες. Το αρχικό σύμβολο της γραμματικής Γ είναι το S :

$$\begin{aligned}\Gamma : \quad S &\rightarrow S_1, \quad S \rightarrow S_2, \quad S \rightarrow S_3, \quad S \rightarrow S_4, \quad S \rightarrow S_5, \quad S \rightarrow S_6, \quad S \rightarrow S_7, \quad S \rightarrow S_8, \\ &\quad S_1 \rightarrow \mathbf{a}S_1, \quad S_1 \rightarrow \mathbf{b}S_1, \quad S_1 \rightarrow \varepsilon, \\ &\quad S_2 \rightarrow \mathbf{a}S_2, \quad S_2 \rightarrow \mathbf{c}S_2, \quad S_2 \rightarrow \varepsilon, \\ &\quad S_3 \rightarrow \mathbf{b}S_3, \quad S_3 \rightarrow \mathbf{c}S_3, \quad S_3 \rightarrow \varepsilon, \\ &\quad S_4 \rightarrow U\mathbf{b}U\mathbf{a}U, \quad S_5 \rightarrow U\mathbf{c}U\mathbf{a}U, \quad S_6 \rightarrow U\mathbf{c}U\mathbf{b}U, \quad S_7 \rightarrow AB, \quad S_8 \rightarrow CF, \\ &\quad U \rightarrow \mathbf{a}U, \quad U \rightarrow \mathbf{b}U, \quad U \rightarrow \mathbf{c}U, \quad U \rightarrow \varepsilon \\ &\quad A \rightarrow \mathbf{a}Ab, \quad A \rightarrow \mathbf{a}Cb, \quad A \rightarrow \mathbf{a}Db, \\ &\quad F \rightarrow \mathbf{b}Fc, \quad F \rightarrow \mathbf{b}Dc, \quad F \rightarrow \mathbf{b}Bc, \\ &\quad C \rightarrow \mathbf{a}C, \quad C \rightarrow \mathbf{a}, \\ &\quad D \rightarrow \mathbf{b}D, \quad D \rightarrow \mathbf{b}, \\ &\quad B \rightarrow \mathbf{c}B, \quad B \rightarrow \mathbf{c}\end{aligned}$$

(γ') Αρκεί να κατασκευάσουμε κάποια γραμματική η οποία για κάθε b εμφανίζει στη λέξη και τρία a . Η γραμματική μας επίσης δεν πρέπει να βάζει κανένα περιορισμό ως προς το με ποια διάταξη θα εμφανίζονται το b και τα αντίστοιχα τρία a . Η παρακάτω γραμματική καλύπτει τις συνθήκες αυτές και μας παράγει τη γλώσσα L_3 . Το αρχικό σύμβολο της γραμματικής είναι το S :

$$S \rightarrow SaSaSaSb, \quad S \rightarrow SaSaSbSa, \quad S \rightarrow SaSbSaSa, \quad S \rightarrow SbSaSaSa, \quad S \rightarrow \varepsilon$$

(δ') Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι κάθε λέξη της γλώσσας μας έχει τη μορφή $w\#uw^Rv$, όπου τα u και v μπορούν να είναι οποιασδήποτε λέξεις από το σύνολο $\{a, b\}^*$, ακόμη και η κενή λέξη. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ακόμη ότι οι παραπάνω λέξεις ουσιαστικά είναι η συγκόληση λέξεων της μορφής $w\#uw^R$ με οποιαδήποτε δυνατή λέξη v . Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να φτιάξουμε δύο γραμματικές, μία για τις λέξεις της μορφής $w\#uw^R$ και μία για τις λέξεις που αντιστοιχούν στο v . Η γραμματική για τις λέξεις όπως η v είναι πολύ απλή, και δίνεται ακριβώς παρακάτω (το αρχικό σύμβολο είναι το A):

$$A \rightarrow aA, \quad A \rightarrow bA, \quad A \rightarrow \varepsilon$$

Σε ότι αφορά τις λέξεις της πρώτης μορφής, παρατηρούμε ότι στα άκρα έχουν ανάστροφα κοιμάτια, ενώ στο κέντρο έχουμε το γράμμα $\#$ και οποιαδήποτε λέξη u . Έτσι καταλήγουμε στην παρακάτω γραμματική, της οποίας το αρχικό σύμβολο είναι το B :

$$B \rightarrow aBa, \quad B \rightarrow bBb, \quad B \rightarrow \#C, \quad C \rightarrow aC, \quad C \rightarrow bC, \quad C \rightarrow \varepsilon$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω γραμματικές προκύπτει η παρακάτω γραμματική με αρχικό σύμβολο το S :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow BA \\ A &\rightarrow aA, \quad A \rightarrow bA, \quad A \rightarrow \varepsilon \\ B &\rightarrow aBa, \quad B \rightarrow bBb, \quad B \rightarrow \#C, \quad C \rightarrow aC, \quad C \rightarrow bC, \quad C \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Η οποία μπορεί να απλοποιηθεί παρατηρώντας ότι τόσο το μη τερματικό σύμβολο A όσο και το μη τερματικό σύμβολο C μας δίνουν όλες τις δυνατές λέξεις με γράμματα τα a και b . Και πάλι το αρχικό σύμβολο είναι το S .

$$\begin{aligned} S &\rightarrow BA \\ A &\rightarrow aA, \quad A \rightarrow bA, \quad A \rightarrow \varepsilon \\ B &\rightarrow aBa, \quad B \rightarrow bBb, \quad B \rightarrow \#A \end{aligned}$$

(ε') Οι λέξεις που ανήκουν στη γλώσσα L_5 είτε είναι της μορφής xwz με $w = w^R$, είτε της μορφής $xwyw^Rz$, όπου:

- Το x είναι είτε η κενή λέξη είτε μια λέξη της μορφής $u_1\#u_2\#\dots\#u_m\#$, $m \geq 1$, και $u_i \in \{a, b\}^*$.
- Το y είναι της μορφής $\#v_1\#v_2\#\dots\#v_n\#$, όπου $n \geq 0$, και $v_i \in \{a, b\}^*$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε τουλάχιστον ένα γράμμα $\#$ (αυτό συμβαίνει αν $n = 0$).
- Το z είναι είτε η κενή λέξη είτε είναι της μορφής $\#t_1\#t_2\#\dots\#t_\ell$, $\ell \geq 1$, και $t_i \in \{a, b\}^*$.

Η παρακάτω γραμματική κατασκευάζει τέτοιες λέξεις (το αρχικό σύμβολο είναι το S):

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XAZ, \\ X &\rightarrow \varepsilon, \quad X \rightarrow U\#X, \\ Z &\rightarrow \varepsilon, \quad Z \rightarrow \#UZ, \\ A &\rightarrow aAa, \quad A \rightarrow bAb, \quad A \rightarrow \varepsilon, \quad A \rightarrow a, \quad A \rightarrow b, \quad A \rightarrow Y \\ Y &\rightarrow \#UY, \quad Y \rightarrow \#, \\ U &\rightarrow aU, \quad U \rightarrow bU, \quad U \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι το μη τερματικό σύμβολο U δημιουργεί οποιαδήποτε λέξη του συνόλου $\{a, b\}^*$. Το A δημιουργεί το κομμάτι w της λέξης, αν αυτή είναι της μορφής xwz με $w = w^R$, είτε το κομμάτι aww^R , αν αυτή είναι της μορφής $xwgyw^Rz$. Τέλος, τα X, Y και Z δημιουργούν αντίστοιχα τα κομμάτια x, y και z των λέξεων της γλώσσας.

□

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Περιγράψτε με συνολοθεωρητικό συμβολισμό τη γλώσσα που αντιστοιχεί στις παρακάτω γραμματικές δομής φράσης Γ . Τεκμηριώστε τις απαντήσεις σας.

(α') [10 μονάδες] $\Gamma = (N, T, P, A)$, όπου

$$N = \{A, B\}, \quad T = \{0\}$$

και

$$P = \{A \rightarrow BAB, A \rightarrow B, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 00, B \rightarrow \varepsilon\}$$

(β') [10 μονάδες] $\Gamma = (N, T, P, A)$, όπου

$$N = \{A, S, X, U\}, \quad T = \{a, b\}$$

και

$$P = \{A \rightarrow XAX, A \rightarrow S, S \rightarrow aUb, S \rightarrow bUa, U \rightarrow XUX, U \rightarrow X, U \rightarrow \varepsilon, X \rightarrow a, X \rightarrow b\}$$

Λύση:

(α') Παρατηρούμε ότι οι παραγωγές $A \rightarrow BAB, A \rightarrow B, A \rightarrow \varepsilon$ παράγουν ακολουθίες μη τερματικών συμβόλων της μορφής $BBBB\dots B$, στις οποίες πλήθος των B είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός (συμπεριβανομένου και του 0). Επειδή κάθε B μας δίνει μηδέν ή δύο 0 συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα γραμματική δημιουργεί τη γλώσσα:

$$L = \{0^{2i} \mid i \geq 0\}$$

(β') Παρατηρούμε ότι οι παραγωγές $U \rightarrow XUX, U \rightarrow X, U \rightarrow \varepsilon$ δημιουργούν από το μη τερματικό σύμβολο U μία ακολουθία από μη τερματικά σύμβολα X , των οποίων το πλήθος είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. Καθώς το X είναι είτε το a είτε b προκύπτει ότι το U παράγει όλες τις λέξεις της γλώσσας $\{a, b\}^*$.

Οι παραγωγές $A \rightarrow XAX$ και $A \rightarrow S$, παράγουν ακολουθίες μη τερματικών συμβόλων της μορφής $XXX\dots XSXXX\dots X$, όπου πλήθος των X πριν το S και το πλήθος των X μετά το S είναι ίσα, και μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός φυσικός αριθμός. Το S με τη σειρά του, και με βάση την παρατήρησή μας για τι λέξεις παράγει το U , παράγει όλες τις λέξεις που αρχίζουν με a και τελειώνουν σε b είτε όλες τις λέξεις που αρχίζουν με b και τελειώνουν σε a . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι λέξεις της γλώσσας που ψάχνουμε είναι της μορφής xyz , όπου:

- Τα x και z είναι οποιεσδήποτε λέξεις από το σύνολο $\{a, b\}^*$, και το μήκος του x είναι ίσο με το μήκος του z και θετικό (αυτό οφείλεται στο ίσο πλήθος των X πριν και μετά το S στις ακολουθίες μη τερματικών συμβόλων που παράγουν οι παραγωγές $A \rightarrow XAX$ και $A \rightarrow S$).
- Το y είναι οποιαδήποτε λέξη που αρχίζει με a και τελειώνει σε b , είτε οποιαδήποτε λέξη που αρχίζει με b και τελειώνει σε a .

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις η γλώσσα που αντιστοιχεί στη δοθείσα γραμματική είναι η γλώσσα:

$$L = \{uavbw \mid u, v, w \in \{a, b\}^* \text{ και } |u| = |w| > 0\} \cup \{ubvaw \mid u, v, w \in \{a, b\}^* \text{ και } |u| = |w| > 0\}$$

□