

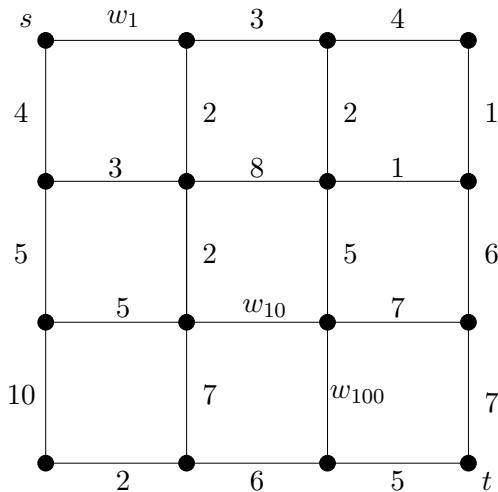
Άσκηση 2

Ημερομηνία Παράδοσης: 21 Νοεμβρίου 2005

Σημειώσεις:

1. Στις απαντήσεις που θα παραδώσετε σημειώστε στην πρώτη σελίδα το ονοματεπώνυμό σας, τον αριθμό μητρώου σας, το τμήμα σας καθώς επίσης και σε ποιά ή ποιά μαθήματα είσαστε εγγεγραμμένοι. Οι φοιτητές του TEM που έχετε περάσει στο παρελθόν τη μία από τις δύο ροές του μαθήματος παρακαλείσθε να το σημειώσετε.
2. Οι φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών που είναι εγγεγραμμένοι μόνο στο μάθημα M251 ή οι εγγεγραμμένοι φοιτητές του TEM που έχουν περάσει τα «Διαχριτά II» και πρόκειται να δώσουν μόνο τα «Διαχριτά I» χρειάζεται να παραδώσουν μόνο τις Ασκήσεις 1–3.
Οι φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών που είναι εγγεγραμμένοι μόνο στο μάθημα M252 ή οι εγγεγραμμένοι φοιτητές του TEM που έχουν περάσει τα «Διαχριτά I» και πρόκειται να δώσουν μόνο τα «Διαχριτά II» χρειάζεται να παραδώσουν μόνο τις Ασκήσεις 4–7.
3. Η παρούσα άσκηση πρέπει να παραδοθεί το αργότερο μέχρι την αρχή του μαθήματος των Διαχριτών I της 21ης Νοεμβρίου, δηλαδή μέχρι τις 17:15. Οποιαδήποτε αργοπορημένη παράδοση άσκησης θα έχει ως συνέπεια τη μείωση του βαθμού κατά 20%.
4. Τις ασκήσεις **δεν** πρέπει να τις γράψετε σε συνεργασία με κάποιο άλλο πρόσωπο, συμφοιτητή σας ή μη. Σε περίπτωση που διαπιστωθεί αντιγραφή όλοι οι εμπλεκόμενοι φοιτητές θα λάβουν αρνητικό βαθμό για την εν λόγω άσκηση, κατ' απόλυτη τιμή ίσο με τον αριθμό μονάδων της άσκησης. Σε περίπτωση που χρησιμοποιήσετε αποτελέσματα από κάποιο βιβλίο, το διαδίκτυο ή οποιαδήποτε άλλη πηγή, θα πρέπει να αναφέρετε ρητά την πηγή σας.
5. Σε περίπτωση που έχετε ερωτήσεις στείλτε μου email στη διεύθυνση: mkaravel@tem.uoc.gr

Πρόβλημα 1 [25 μονάδες] Εφαρμόστε τον αλγόριθμο εύρεσης ελαχίστων μονοπατιών που έχει παρουσιαστεί στο μάθημα για να βρείτε το ελάχιστο μονοπάτι μεταξύ των s και t στο γράφημα του παρακάτω σχεδίου. Οι αριθμοί στις ακμές δηλώνουν τις αποστάσεις μεταξύ των κορυφών. Η ποσότητα w_1 είναι ίση με το ψηφίο των μονάδων του αριθμού μητρώου σας, η ποσότητα w_{10} είναι ίση με το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού μητρώου σας, ενώ η ποσότητα w_{100} είναι ίση με το ψηφίο των εκατοντάδων του αριθμού μητρώου σας. Για παράδειγμα αν ο αριθμός μητρώου ενός φοιτητή είναι 634, τότε $w_1 = 4$, $w_{10} = 3$ και $w_{100} = 6$.



Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Έστω ότι ένα γράφημα G χωρίς βρόχους έχει τουλάχιστον 11 κορυφές. Αποδείξτε ότι είτε το G είτε το \overline{G} (το συμπλήρωμα του G ως προς τον πλήρη γράφο με τον ίδιο αριθμό κορυφών) δεν είναι επίπεδο.

Πρόβλημα 3 [55 μονάδες] Στα παρακάτω ερωτήματα συμβολίζουμε με K_n τον πλήρη γράφο με n κορυφές.

- (α') [20 μονάδες] Κάθε ακμή του K_6 πρόκειται να χρωματιστεί με ένα από τα χρώματα κόκκινο ή μπλε. Αποδείξτε ότι όπως και να γίνει ο χρωματισμός, είτε θα παραχθεί ένα κόκκινο υπογράφημα ισόμορφο με το K_3 είτε ένα μπλε υπογράφημα ισόμορφο με το K_3 .
- (β') [25 μονάδες] Οι ακμές του K_n χρωματίζονται κόκκινες ή μπλε με κάποιο τυχαίο τρόπο. Δείξτε ότι αν υπάρχουν έξι ή περισσότερες κόκκινες ακμές με κοινό άκρο κάποια κορυφή, τότε είτε υπάρχει ένα κόκκινο υπογράφημα ισόμορφο με το K_4 είτε υπάρχει ένα μπλε υπογράφημα ισόμορφο με το K_3 . Δείξτε ότι αν υπάρχουν τέσσερεις ή περισσότερες μπλε ακμές με κοινό άκρο κάποια κορυφή, τότε είτε υπάρχει ένα κόκκινο υπογράφημα ισόμορφο με το K_4 είτε υπάρχει ένα μπλε υπογράφημα ισόμορφο με το K_3 .
- (γ') [10 μονάδες] Δείξτε ότι όπως και να χρωματιστούν οι ακμές του K_9 χρησιμοποιώντας τα χρώματα κόκκινο και μπλε, είτε υπάρχει ένα κόκκινο υπογράφημα K_4 ή ένα μπλε υπογράφημα K_3 .

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Δείξτε ότι η γλώσσα $L = \{a^{4^i} \mid i \geq 1\}$ δεν είναι γλώσσα που αναγνωρίζεται από μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων.

Πρόβλημα 5 [25 μονάδες] Μετατρέψτε τη μη αιτιοχρατική μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα σε αιτιοχρατική μορφή. Η αρχική κατάσταση της μη αιτιοχρατικής μηχανής είναι η κατάσταση A . Εν συνεχεία κατασκευάστε μία γραμματική τύπου-3 που να αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα με τη μη αιτιοχρατική μηχανή του παρακάτω πίνακα.

Κατάσταση	Είσοδος		Έξοδος
	a	b	
A	B, C	—	0
B	A, D	B	0
C	A	C	0
D	A	B, C	1

Πρόβλημα 6 [25 μονάδες] Έστω L μία γλώσσα που καθορίζεται από κάποια γραμματική στην οποία οι παραγωγές είναι της μορφής $A \rightarrow \gamma$ και $A \rightarrow \gamma B$, όπου τα A και B είναι μη τερματικά σύμβολα και το γ είναι μία συμβολοσειρά τερματικών συμβόλων. Δείξτε ότι η L αναγνωρίζεται από κάποια μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων.

Πρόβλημα 7 [30 μονάδες] Έστω

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Με άλλα λόγια το σύνολο Σ περιέχει όλους του πίνακες 2×1 με στοιχεία τα 0 και 1. Μία λέξη με σύμβολα (γράμματα) από το Σ δίνει δύο γραμμές από 0 και 1. Θεωρήστε κάθε γραμμή ως ένα δυαδικό αριθμό και έστω

$$C = \{w \in \Sigma^* \mid \text{η κάτω γραμμή του } w \text{ είναι τρεις φορές η πάνω γραμμή}\}.$$

Για παράδειγμα, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C$, αλλά $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin C$. Δείξτε ότι η γλώσσα C αναγνωρίζεται από μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων.

Σύνολο μονάδων: 200