

Άσκηση 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 31 Οκτωβρίου 2005

Σημειώσεις:

1. Στις απαντήσεις που θα παραδώσετε σημειώστε στην πρώτη σελίδα το ονοματεπώνυμό σας, τον αριθμό μητρώου σας, το τμήμα σας καθώς επίσης και σε ποιά μαθήματα είσαστε εγγεγραμμένοι.
2. Οι φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών που είναι εγγεγραμμένοι μόνο στο μάθημα M251 ή οι εγγεγραμμένοι φοιτητές του TEM που έχουν περάσει τα «Διαχριτά II» και πρόκειται να δώσουν μόνο τα «Διαχριτά I» χρειάζεται να παραδώσουν μόνο τις Ασκήσεις 1–3.
Οι φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών που είναι εγγεγραμμένοι μόνο στο μάθημα M252 ή οι εγγεγραμμένοι φοιτητές του TEM που έχουν περάσει τα «Διαχριτά I» και πρόκειται να δώσουν μόνο τα «Διαχριτά II» χρειάζεται να παραδώσουν μόνο τις Ασκήσεις 4–5.
3. Η παρούσα άσκηση πρέπει να παραδοθεί το αργότερο μέχρι την αρχή του μαθήματος της 31ης Οκτωβρίου, δηλαδή μέχρι τις 11:15 πμ.
4. Σε περίπτωση που έχετε ερωτήσεις στείλτε μου email στη διεύθυνση: mkaravel@tem.uoc.gr

Πρόβλημα 1 [30 μονάδες] Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα τεκμηριώνοντας κάθε φορά τις απαντήσεις σας.

- (α') [5 μονάδες] Υποθέστε ότι δεν επιτρέπονται επαναλήψεις. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7, 8;
- (β') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') είναι μικρότεροι από 4000;
- (γ') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') είναι άρτιοι;
- (δ') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') είναι περιττοί;
- (ε') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') είναι πολλαπλάσια του 5;
- (ζ') [5 μονάδες] Πόσοι από τους αριθμούς στο τμήμα (α') περιέχουν και τα ψηφία 3 και 5;

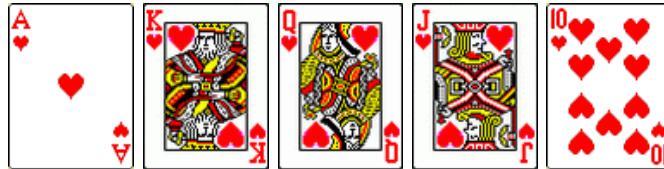
Πρόβλημα 2 [25 μονάδες] Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα τεκμηριώνοντας κάθε φορά τις απαντήσεις σας.

- (α') [5 μονάδες] Έστω ένα σύνολο Σ n σημείων στο επίπεδο, τέτοια ώστε ανά τρία να μην είναι συνευθειακά. Πόσες διαφορετικές ευθείες ορίζουν τα σημεία του Σ ;
- (β') [10 μονάδες] Έστω ένα σύνολο Σ n σημείων στο επίπεδο εκ των οποίων $k \geq 2$ βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία ℓ , ενώ τα υπόλοιπα δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή ($k < n$). Θα ονομάσουμε L το υποσύνολο των σημείων του Σ που βρίσκονται πάνω στην ℓ και F το σύνολο των υπολοίπων $n - k$ σημείων, δηλαδή, $F = \Sigma \setminus L$. Αν τα σημεία στο F είναι ανά τρία μη συνευθειακά, ενώ κάθε σημείο στο L δεν είναι συνευθειακό με οποιαδήποτε δύο σημεία στο F , να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών ευθειών που ορίζουν τα σημεία στο Σ .
- (γ') [10 μονάδες] Έστω ένα σύνολο Σ n σημείων στον τρισδιάστατο χώρο, εκ των οποίων $k \geq 2$ βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία ℓ , ενώ τα υπόλοιπα δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή ($k < n$). Ονομάζουμε L το υποσύνολο του Σ που αποτελείται από τα σημεία επί της ℓ , και F το σύνολο των υπολοίπων σημείων, δηλαδή $F = \Sigma \setminus L$. Θεωρούμε ότι τα σημεία του F είναι ανά τρία μη συνευθειακά, και ανά τέσσερα μη συνεπίπεδα. Επίσης θεωρούμε ότι κάθε σημείο του L δεν είναι συνευθειακό με οποιαδήποτε δύο σημεία στο F και ότι δεν είναι συνεπίπεδο με οποιαδήποτε τρία σημεία στο F . Τέλος, θεωρούμε ότι οποιαδήποτε δύο σημεία του L δεν είναι συνεπίπεδα με οποιαδήποτε δύο σημεία του F . Με βάση τις παραπάνω θεωρήσεις, πόσα διαφορετικά επίπεδα ορίζουν τα n σημεία του Σ ;

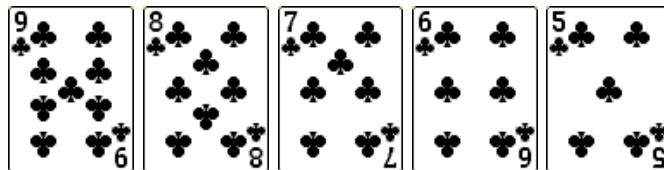
Πρόβλημα 3 [45 μονάδες] Το Πόκερ είναι ένα παιχνίδι που παίζεται με τα 52 φύλλα της τράπουλας (δηλαδή χωρίς τα Joker). Κάθε παίκτης έχει πέντε χαρτιά (το λεγόμενο «χέρι») και κερδίζει αναλόγως του πόσο «ισχυρά» είναι το φύλλα του.

Οι δυνάμεις των φύλλων περιγράφονται παρακάτω, από το ισχυρότερο στο ασθενέστερο. Αν με βάση τους παρακάτω ορισμούς κάποιο χέρι αντιστοιχεί σε παραπάνω από μία δύναμη, τότε λογίζεται ότι ανήκει στην ισχυρότερη δύναμη.

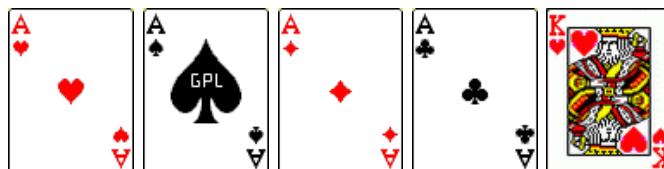
Royal flush Κέντα από δέκα στον άσσο και όλα τα χαρτιά του ίδιου συμβόλου. Π.χ.



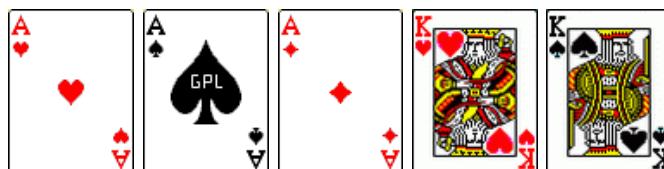
Κέντα χρώμα Οποιαδήποτε κέντα με όλα τα πέντε χαρτιά του ίδιου συμβόλου η οποία δεν είναι κέντα στον άσσο (δηλαδή κέντα που δεν είναι Royal flush). Π.χ.



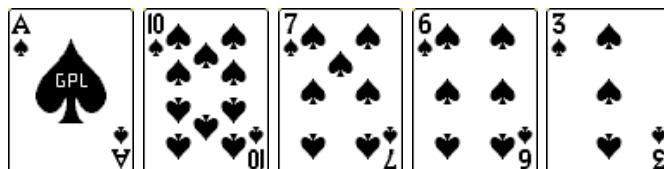
Καρέ Οποιαδήποτε τέσσερα χαρτιά του ίδιου είδους. Π.χ.



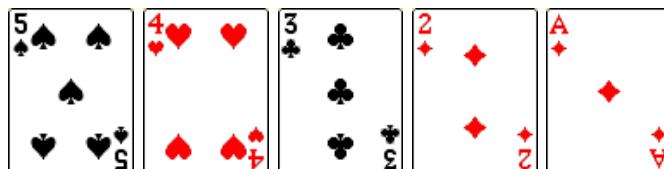
Φουλ Οποιαδήποτε τρία χαρτιά του ίδιου είδους μαζί με οποιαδήποτε δύο χαρτιά του ίδιου είδους. Στο παράδειγμα παρακάτω δείχνουμε το «Φουλ άσσων με ρηγάδες».



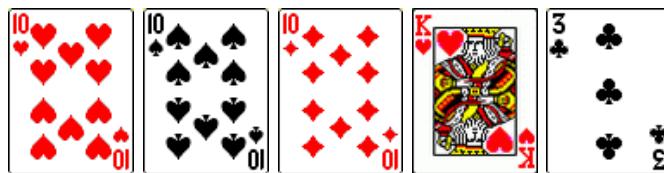
Χρώμα Οποιαδήποτε πέντε χαρτιά του ίδιου συμβόλου τα οποία δεν είναι συνεχόμενα. Π.χ.



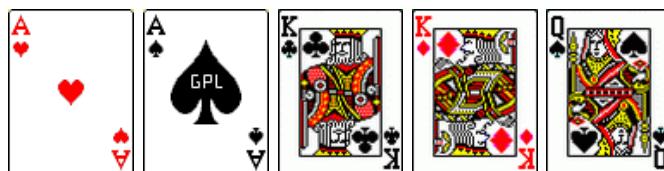
Κέντα Οποιαδήποτε πέντε συνεχόμενα χαρτιά με διαφορετικά σύμβολα. Π.χ.



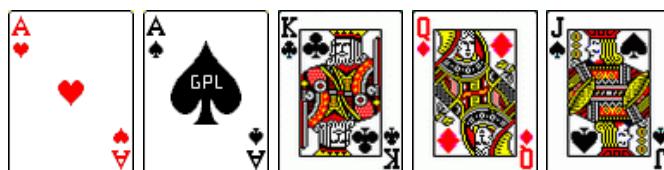
Τρία όμοια Οποιαδήποτε τρία χαρτιά του ίδιου είδους. Π.χ.



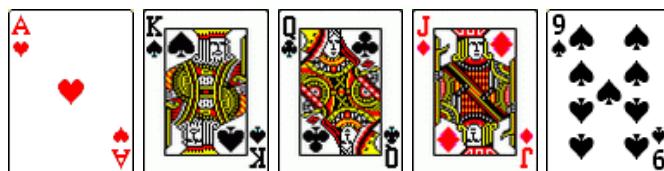
Δύο ζεύγη Οποιαδήποτε δύο χαρτιά του ίδιου είδους μαζί με άλλα δύο χαρτιά του ίδιου είδους αλλά διαφορετικό από το είδος του πρώτου ζευγαριού. Π.χ.



Ένα ζεύγος Οποιαδήποτε δύο χαρτιά του ίδιου είδους. Π.χ.

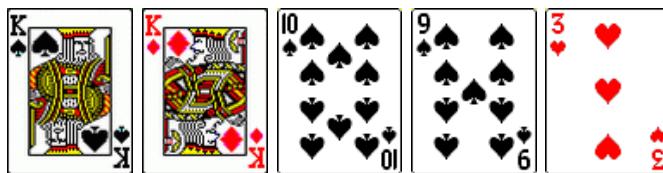
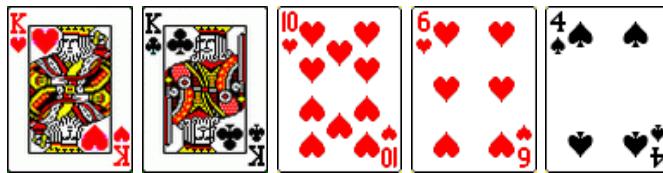


Μεγάλο φύλλο Οποιοδήποτε χέρι δεν έχει κάποιο από τους παραπάνω συνδυασμούς. Π.χ.

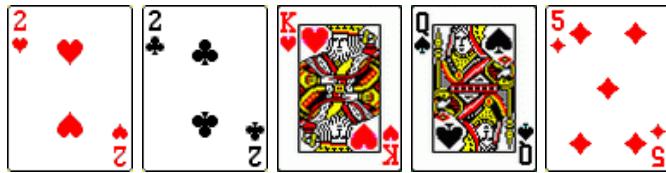


Στο παραπάνω παράδειγμα δείχνουμε το καλύτερο δυνατό «Μεγάλο φύλλο» που μπορεί να έχει κάποιος παίκτης. Υπάρχουν όμως και άλλα εξίσου καλύτερα μεγάλα φύλλα. Τα περί ισοδυναμίας χεριών εξηγούνται παρακάτω.

Σε ό,τι αφορά τα φύλλα αυτά καθαυτά, ο άστος (A) είναι ισχυρότερος όλων, μετά ακολουθεί ο βαγός (K), η ντάμα (Q), ο βαλές (J), το 10, το 9, το 8, κτλ., μέχρι το 2. Χαρτιά διαφορετικού συμβόλου θεωρούνται ισοδύναμα. Έτσι παρά το γεγονός ότι σε καθένα από τα παρακάτω δύο χέρια έχουμε από ένα ζεύγος στο ρήγα, το δεύτερο χέρι είναι ισχυρότερο γιατί το τέταρτο φύλλο του (από αριστερά) είναι ισχυρότερο.

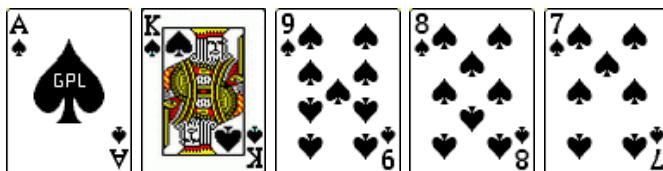


Αντίθετα τα δύο χέρια που φαίνονται παρακάτω είναι ισοδύναμα, και στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει νικητής.



Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας με σαφήνεια το τρόπο με τον οποίο βγάλατε το αποτέλεσμά σας. Θεωρούμε ότι η τράπουλα είναι καλά ανακατεμένη και άρα όλες οι δυνατές διατάξεις των 52 χαρτιών είναι ισοπίθανες.

- (α') [7 μονάδες] Αν τραβήξετε 5 χαρτιά από την πλήρη τράπουλα, ποια η πιθανότητα να βγάλετε φουλ;
- (β') [5 μονάδες] Αν τραβήξετε 5 χαρτιά από την πλήρη τράπουλα, ποια η πιθανότητα να βγάλετε χρώμα;
- (γ') [8 μονάδες] Αν τραβήξετε 5 χαρτιά από την πλήρη τράπουλα, ποια η πιθανότητα να βγάλετε κέντα;
- (δ') [5 μονάδες] Αν τραβήξετε 5 χαρτιά από την πλήρη τράπουλα, ποια η πιθανότητα να βγάλετε τρία όμοια;
- (ε') [20 μονάδες] Παίζετε με κάποιον αντίπαλο. Τραβάτε πρώτος/η εσείς 5 χαρτιά και μετά ο αντίπαλος άλλα πέντα χαρτιά. Αν εσείς έχετε το παρακάτω χέρι (δηλαδή χρώμα στα μπαστούνια με άσσο, ρηγά, 9, 8 και 7), ποια η πιθανότητα ο αντίπαλός σας να έχει ισχυρότερο χέρι;



Σημείωση: Οι πιθανότητες του σας ζητείται να υπολογίσετε ερωτήματα (α')-(ε') παραπάνω πρέπει να παρουσιαστούν δύο μορφές: (1) ως ρητοί αριθμοί σε κλασματική μορφή (πρέπει να είναι ανάγωγο κλάσμα), και (2) ως αριθμοί κινητής υποδιαστολής με 6 σημαντικά ψηφία.

Πρόβλημα 4 [80 μονάδες] Κατασκευάστε μια γραμματική δομής γλώσσας για κάθε μία από τις παραχάτω γλώσσες. Τεκμηριώστε τις κατασκευές σας.

- (α') [10 μονάδες] $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ και } i = j \text{ ή } j = k, \text{ αλλά όχι και τα δύο}\}$
- (β') [20 μονάδες] $L_2 = \{a, b, c\}^* \setminus \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$
- (γ') [15 μονάδες] $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \eta w \text{ έχει τριπλάσια } a \text{ απ' ότι } b\}$
- (δ') [15 μονάδες] $L_4 = \{w \# x \mid w, x \in \{0, 1\}^*\text{ και } \eta \text{ λέξη } w^R \text{ είναι μια υπολέξη}^\dagger \text{ της } x\}$
- (ε') [20 μονάδες] $L_5 = \{x_1 \# x_2 \# \dots \# x_k \mid k \geq 1, \forall i, x_i \in \{a, b\}^*, \text{ και για κάποια } i \text{ και } j, x_i = x_j^R\}$

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Περιγράψτε με συνολοθεωρητικό συμβολισμό τη γλώσσα που αντιστοιχεί στις παραχάτω γραμματικές δομής φράσης Γ . Τεκμηριώστε τις απαντήσεις σας.

- (α') [10 μονάδες] $\Gamma = (N, T, P, A)$, όπου

$$N = \{A, B\}, \quad T = \{0\}$$

και

$$P = \{A \rightarrow BAB, A \rightarrow B, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 00, B \rightarrow \varepsilon\}$$

- (β') [10 μονάδες] $\Gamma = (N, T, P, A)$, όπου

$$N = \{A, S, X, U\}, \quad T = \{a, b\}$$

και

$$P = \{A \rightarrow XAX, A \rightarrow S, S \rightarrow aUb, S \rightarrow bUa, U \rightarrow XUX, U \rightarrow X, U \rightarrow \varepsilon, X \rightarrow a, X \rightarrow b\}$$

Σύνολο μονάδων: 200

[†]Μία λέξη w είναι υπολέξη μιας λέξης w , αν υπάρχουν λέξεις v_1 και v_2 , τέτοιες ώστε ηw να μπορεί να γραφεί ως $w = v_1uv_2$. Οι v_1 και v_2 είναι δυνατόν να είναι η κενή λέξη ε .