



6^ο εξάμηνο Σχολής ΕΜΦΕ ΕΜΠ (Κατευθύνσεις Μαθηματικού και Φυσικού Εφαρμογών)
Εξέταση κανονικής περιόδου στη «Θεωρία Ελαστικότητας»
Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Δ. Ευταξιόπουλος
18-6-2009

Θέμα 1 (30%)

Για ανομοιογενή υλικά, με χωρικά μεταβαλλόμενες ελαστικές ιδιότητες, δίνονται οι σχέσεις

$$\mu(x) = \mu_0(1 + ax) \quad (1)$$

$$\lambda(x) = k\mu(x) \quad (2)$$

για τους συντελεστές του Lamé $\lambda(x)$ και $\mu(x)$. Οι ποσότητες μ_0 , a και k είναι σταθερές. Στην κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, δίνονται οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων

$$\sigma_{xx} = \lambda(x)(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) + 2\mu(x)\epsilon_{xx} \quad (3)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu(x)\epsilon_{xy} \quad (4)$$

για τα υλικά αυτά. Να δείξετε ότι η εξίσωση Navier, κατά τη διεύθυνση x , όταν απουσιάζουν οι μαζικές δυνάμεις, για την κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, δίνεται από τη σχέση

$$\underbrace{\mu_0(1 + ax)}_{\Gamma(x)} \left(k \frac{\partial A}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) + \mu_0 a \left(\kappa A + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = 0 \quad (5)$$

όπου

$$A = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (6)$$

Θέμα 2 (30%)

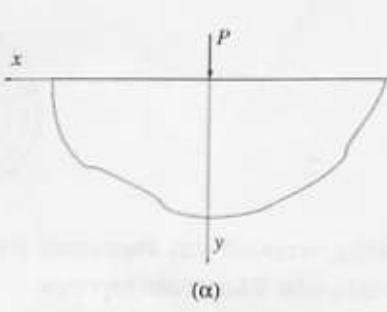
Θεωρούμε το πρόβλημα μιας συγκεντρωμένης δύναμης P που δρα κάθετα στην ελεύθερη επιφάνεια ενός ημιεπιπέδου, όπως φαίνεται στην περίπτωση (α) του σχήματος. Το πεδίο των τάσεων γι' αυτό το πρόβλημα δίνεται από τις σχέσεις

$$\sigma_{xx} = -\frac{2Px^2y}{\pi(x^2 + y^2)^2} \quad (7)$$

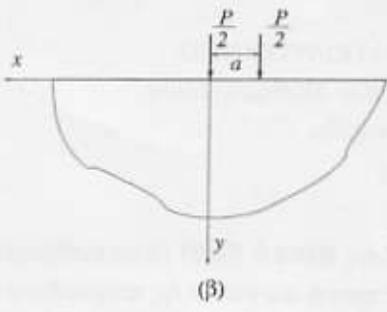
$$\sigma_{yy} = -\frac{2Py^3}{\pi(x^2 + y^2)^2} \quad (8)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2Pxy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \quad (9)$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, να βρείτε τις τάσεις στο ημιεπίπεδο, για το πρόβλημα των δύο συγκεντρωμένων δυνάμεων $\frac{P}{2}$, που βρίσκονται σε απόσταση a μεταξύ τους (περίπτωση (β) του σχήματος).



(α)



(β)

Θέμα 3 (40%)

Η αρφιέρειστη δοκός του σχήματος, μήκους L , φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο q . Η ακαμψία της δοκού είναι EI . Δίνεται η προσεγγιστική συνάρτηση βέλους κάμψης

$$u(x) = \sum_{i=1}^N a_i x^i (L - x) \quad (10)$$

για το φορέα αυτόν.

- 1) Δείξτε ότι η σχέση (10) ικανοποιεί τις κινηματικές συνθήκες του προβλήματος.
2) Θέτοντας $N = 2$, να βρεθούν οι σταθερές a_1 και a_2 , με τη μέθοδο Rayleigh - Ritz.

q

