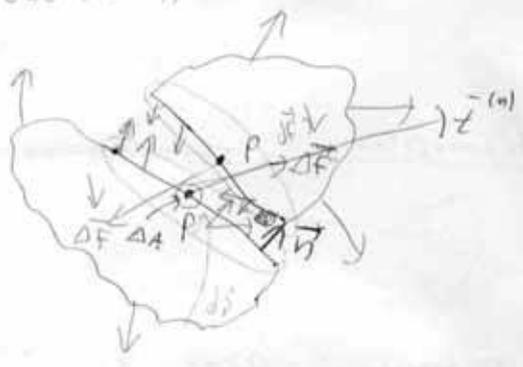
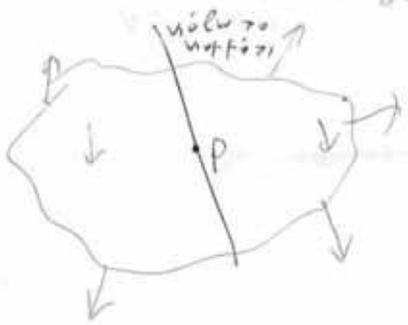


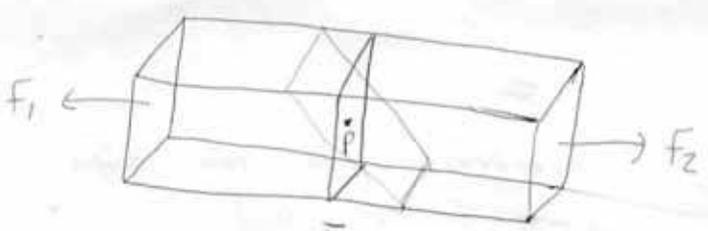
Τάση του Cauchy



ισορροπία \equiv το σώμα δεν κινείται
 (Αν υπάρχει ανισορροπία, τότε υπάρχει αδρανειακό σύστημα ώστε να μην κινείται)



τάση: $\vec{T}(\vec{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta A}$, ονομάζω $\vec{T}(\vec{n}) // \delta \vec{F}$



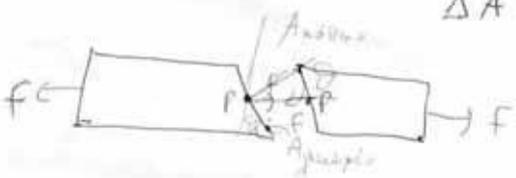
Στην ισορροπία πάντα $|F_1| = |F_2| = |F|$



Τα ποσοστά διακρίσεων δίνονται από τον όρο.

τάση: $\vec{\sigma} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$

$\sigma_n = \frac{F}{A_n}$



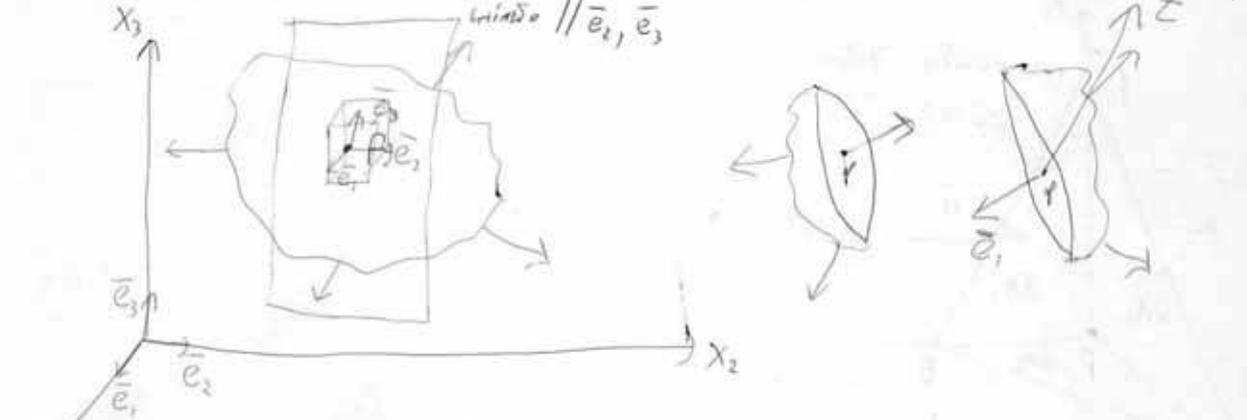
τάση: $\vec{\sigma}_\lambda = \frac{F}{A_\lambda} =$

$A_\lambda = A_n \cos \theta$

$\vec{\sigma}_\lambda = \frac{F \cdot \cos \theta}{A_n} = \vec{\sigma}_n \cdot \cos \theta$

Θα πρέπει να βγούμε να τον αριθμό που μας δίνει τον αριθμό των επιπέδων που περνούν από τον άξονα.

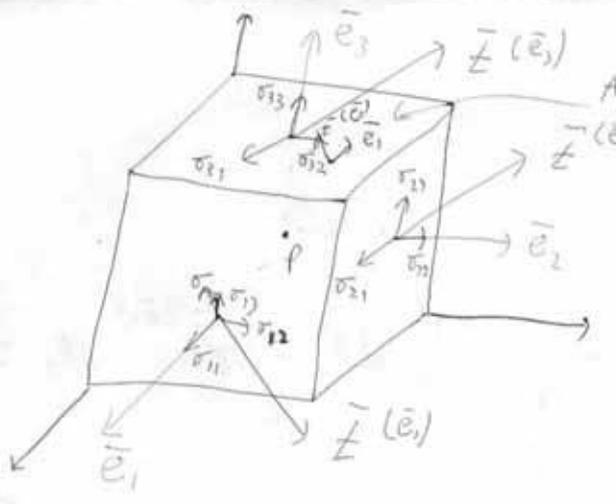
Ανώτατος τάση (τάση)



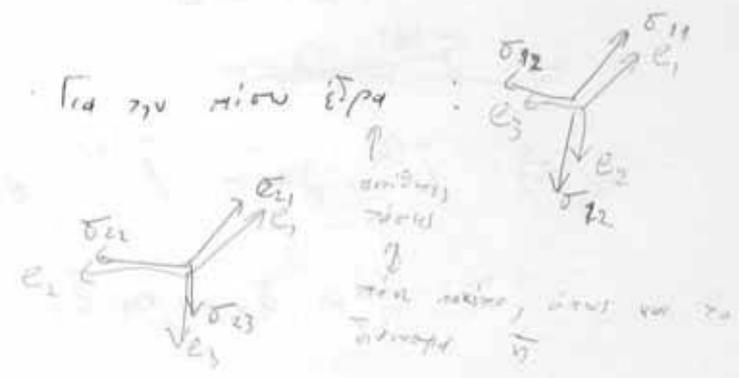
$$\bar{z}(\bar{e}_1) = \sigma_{11}(\bar{e}_1) \bar{e}_1 + \sigma_{12}(\bar{e}_1) \bar{e}_2 + \sigma_{13}(\bar{e}_1) \bar{e}_3 \quad \parallel \bar{e}_2, \bar{e}_3$$

$$\bar{z}(\bar{e}_2) = \sigma_{21}(\bar{e}_2) \bar{e}_1 + \sigma_{22}(\bar{e}_2) \bar{e}_2 + \sigma_{23}(\bar{e}_2) \bar{e}_3 \quad \parallel \bar{e}_1, \bar{e}_3$$

$$\bar{z}(\bar{e}_3) = \sigma_{31}(\bar{e}_3) \bar{e}_1 + \sigma_{32}(\bar{e}_3) \bar{e}_2 + \sigma_{33}(\bar{e}_3) \bar{e}_3 \quad \parallel \bar{e}_1, \bar{e}_2$$



Από την τιμή αυτή.



Για την τιμή αυτή

↑ αντιστοιχεί στον κανονικό, ενώ για τον παράλληλο, ενώ για τον παράλληλο.

Επίσης

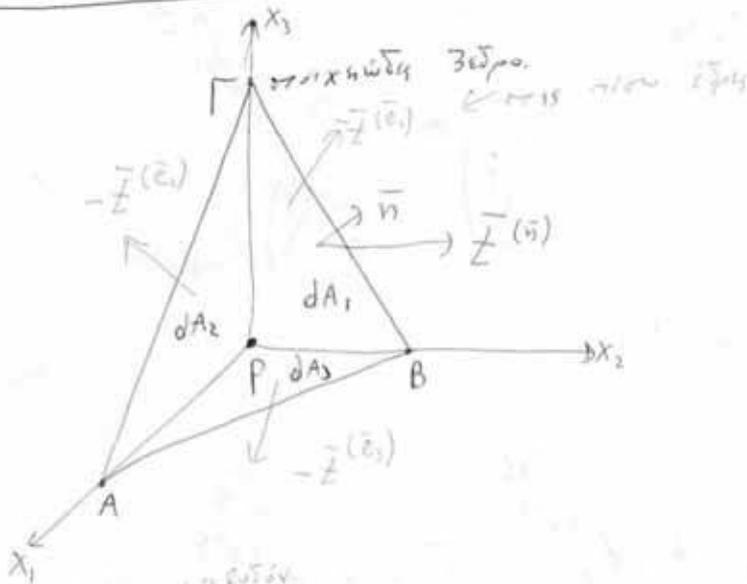
τις

τάση

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Εξαρτάται από την κατάσταση του υλικού. Αν αλλάξει το υλικό, τότε θα αλλάξει και η τιμή.

Σχόλια Διαφορών και Γαλιανός τάσεων



$\vec{dA} = (\overline{AB\Gamma}) \approx dA \cdot \vec{n}$

$dA_1 = \vec{dA} \cdot (\vec{n} \cdot \bar{e}_1) = \vec{dA} \cdot (\vec{n} \cdot \bar{e}_1)$

$-dA_2 = dA \cdot (\vec{n} \cdot \bar{e}_2)$

$-dA_3 = dA \cdot (\vec{n} \cdot \bar{e}_3)$

Θέλω $\sum \vec{F} = 0$

~~$\vec{z}(\bar{e}_1) \cdot dA_1$~~

$\vec{z}(\bar{n}) \cdot dA - \vec{z}(\bar{e}_1) \cdot dA_1 - \vec{z}(\bar{e}_2) \cdot dA_2 - \vec{z}(\bar{e}_3) \cdot dA_3 = 0$

$\vec{n} = n_1 \bar{e}_1 + n_2 \bar{e}_2 + n_3 \bar{e}_3$

Άρα $\vec{z}(\bar{n}) = \vec{z}(\bar{e}_1) \cdot n_1 + \vec{z}(\bar{e}_2) \cdot n_2 + \vec{z}(\bar{e}_3) \cdot n_3$

$\vec{z}_i(\bar{n}) = \vec{z}_i(\bar{e}_1) \cdot n_1 + \vec{z}_i(\bar{e}_2) \cdot n_2 + \vec{z}_i(\bar{e}_3) \cdot n_3$

$\underline{\underline{T}}^{(\bar{n})} = \bar{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}$

$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

← Λίθη του Cauchy

$\left[\underline{\underline{t}}_1^{(\bar{n})}, \underline{\underline{t}}_2^{(\bar{n})}, \underline{\underline{t}}_3^{(\bar{n})} \right] = [n_1, n_2, n_3] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

9-10-08

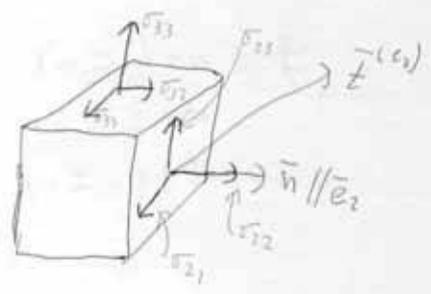
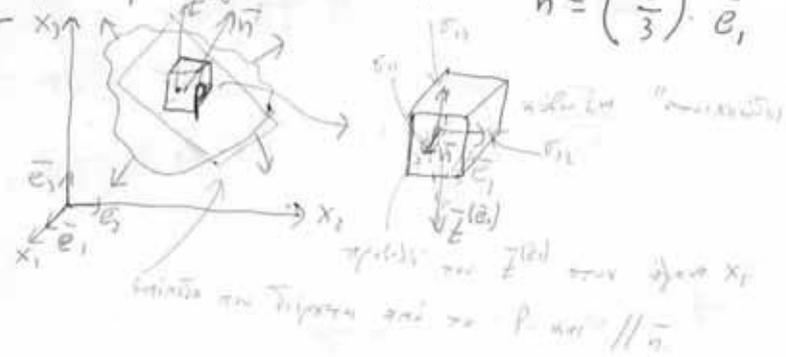
Άσκηση 1

$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

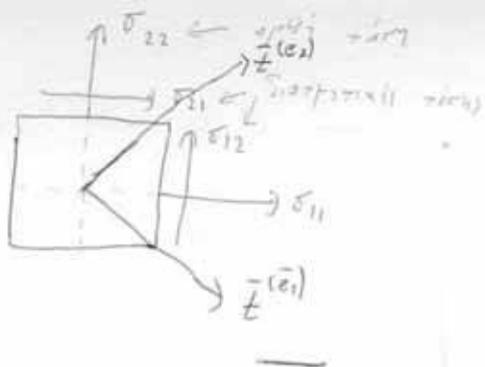
Να υπολογιστεί το διάνυσμα τάσης $\underline{\underline{t}}$ στο σημείο P.

με προσέγγιση διάνυσμα $\bar{n} = \left(\frac{2}{3}\right) \bar{e}_1 - \frac{2}{3} \bar{e}_2 + \frac{1}{3} \bar{e}_3$

Λύση



$\underline{\underline{t}}^{(\bar{n})} = \bar{n} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{10}{3} & 0 \end{bmatrix}$



Άσκηση 2

Έστω ένα σφαιρικό ρ ο τανυστής τάσεων είναι

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} a\sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & 0\sigma \end{bmatrix}$$

Να προσδιοριστούν οι a, b, c , ώστε το διάνυσμα τής τάσης που δρμά στο ρ εδρείον επί κείνου να είναι μηδέν $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3$

Λύση

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{n} \cdot [\sigma_{ij}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a\sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & 0\sigma \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} a+b+1 & a+c+1 & b+c+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} a+b = -1 \\ a+c = -1 \\ b+c = -1 \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow a = b = c = -\frac{1}{2}$$

Άσκηση 3

Ο πίνακας των τερμών είναι

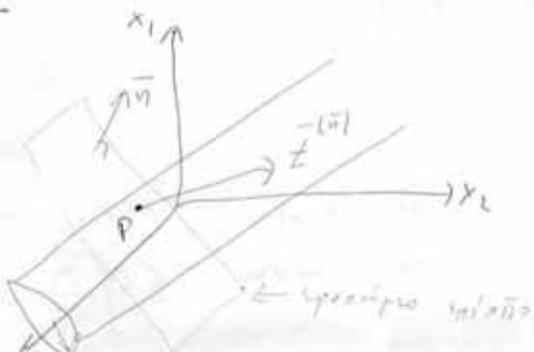
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

και αντίστοιχα σημείο $Ox_1x_2x_3$.

Να βρεθεί η ~~τάση~~ σε σημείο $P(2, 1, \sqrt{3})$ το διάνυσμα τάσης και σημείο εφαπτόμενο στην κυλινδρική επιφάνεια

$$x_2^2 + x_3^2 = 4$$

Λύση



Το σημείο P βρίσκεται πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια.

Παίρνουμε τον τανυστή των τερμών στο σημείο P

$$\Sigma(P) = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα.

Παίρνουμε την επιφάνεια $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2 - 4 = 0$

Επί κάθετο διάνυσμα είναι $\bar{n} = \nabla\phi$

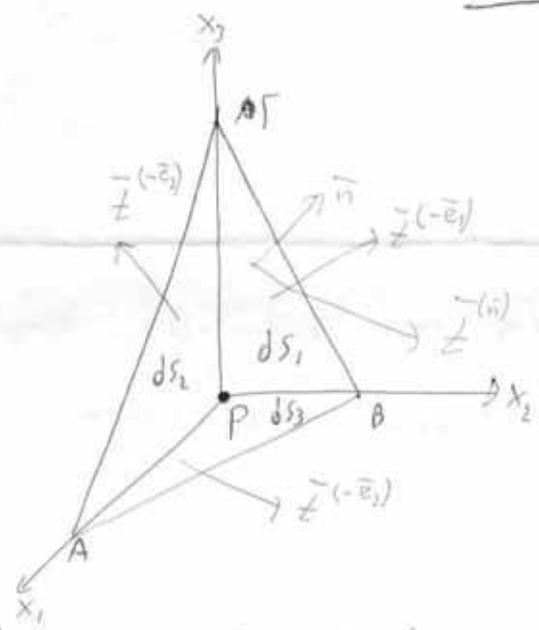
Άρα το μοναδιαίο είναι ~~η~~

$$\bar{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{1}{|\nabla\phi|} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

• $|\nabla\phi| = [2^2 + 4 \cdot 3]^{1/2} = 4$

• Άρα $\vec{n} = \frac{1}{4} [0 \ 2 \ 2\sqrt{3}]$

• Άρα $\vec{r}^{(-\vec{e}_i)} = \vec{n} \cdot \Sigma =$
 $= [0 \ \frac{1}{2} \ \frac{\sqrt{3}}{2}] \cdot \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} =$
 $= [\frac{5}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}]$



Γνωρίζουμε τον πίνακα των τάσεων $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

Υπάρχουν υποσφαιρικές συνιστώσες από ένα εσωτερικό σημείο π.χ.: από το κέντρο βαρύτητας.

Από ισορροπία αυτού του υδραίου έχουμε

$$\vec{r}^{(\vec{n})} dS_{(AB)} - \vec{r}^{(\vec{e}_1)} dS_{(PB)} - \vec{r}^{(\vec{e}_2)} dS_{(PA)} - \vec{r}^{(\vec{e}_3)} dS_{(PAB)} + \rho \cdot \vec{b} \cdot dV = 0$$

↑
υποσφαιρικές συνιστώσες στο κέντρο βαρύτητας

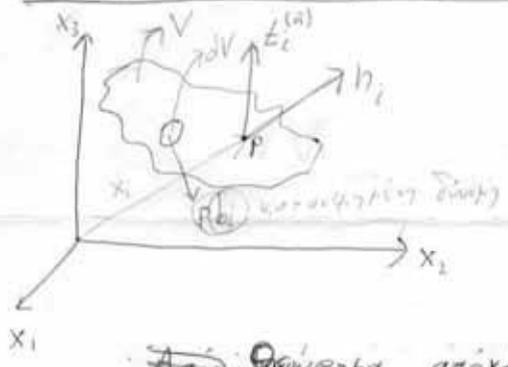
όπως το dV είναι διαφορικά 3ης τάξης, ενώ τα dS 2ης, άρα

$$(r_{PB}) = (a_{BC}) \cdot n_i$$

$$\begin{aligned} \text{Hρα } \vec{z}^{(\bar{n})} dS &= \vec{z}^{(\bar{e}_1)} dS \cdot n_1 + \vec{z}^{(\bar{e}_2)} dS \cdot n_2 + \vec{z}^{(\bar{e}_3)} dS \cdot n_3 \\ \Rightarrow \vec{z}^{(\bar{n})} &= \vec{z}^{(\bar{e}_1)} \bar{n}_1 + \vec{z}^{(\bar{e}_2)} \bar{n}_2 + \vec{z}^{(\bar{e}_3)} \bar{n}_3 = \\ &= \bar{n} \cdot \underline{z} \end{aligned}$$

23-10-08

Συνθήκες ισορροπίας παρατορυχωσίου σώματος



$$\begin{aligned} \sum F &= 0 \\ \Rightarrow \int_S \vec{z}^{(\bar{n})} dS + \int_V p \cdot \underline{b}_i dV &= 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα αποκλίσεων (Gauss)

$$\int_V u_{i,i} dV = \int_S u_i n_i dS$$

Τανυστικοί δείκτες:

$$\vec{V} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 = a_i \bar{e}_i \quad (\text{όταν θεωρούμε } a_i = 0 \text{ για } i > 3)$$

$$u_{ijj} = u_{11} + u_{22} + u_{33} = \frac{du_1}{dx_1} + \frac{du_2}{dx_2} + \frac{du_3}{dx_3}$$

$$u_i n_i = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3$$

$$\int_V T_{ijk} \dots, p dV = \int_S T_{ijk} \dots n_p dS$$

~~$$\vec{z}^{(\bar{n})} = \bar{n} \cdot \underline{z}$$~~

$\vec{t}^{(n)} = \vec{n} \cdot T$, $t_i^{(n)} = n_j \cdot \sigma_{ji}$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$

$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij}$

$\int_{S_0} t_i^{(n)} dS = \int_S n_j \sigma_{ji} dS = \int_V \sigma_{ji} n_j dV$

$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = 0 \quad \forall V$

$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0$ (Εξισωματαρια ισορροκιας (ως προς ΣF)

Παράδειγμα

$T = \begin{pmatrix} 3x_1 x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}$ \rightarrow ανυποτις \rightarrow σ_{ij}

Ποια κατωλικη Σ επιφανεω χρειαζεται (ρb), ωστε να ισορροκισται η επιφανεω ισορροκιασ?

Λύση

$$\sigma_{r_i, i} + \rho b_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_{1i}}{dx_1} + \frac{d\sigma_{2i}}{dx_2} + \frac{d\sigma_{3i}}{dx_3} + \rho b_i = 0$$

$$\cdot \Gamma_{1a} \quad i=1 \quad \therefore \frac{d\sigma_{11}}{dx_1} + \frac{d\sigma_{21}}{dx_2} + \frac{d\sigma_{31}}{dx_3} + \rho b_1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x_2 + 10x_2 + 0 + \rho b_1 = 0$$

$$\Rightarrow \rho b_1 = -13x_2$$

$$\cdot \Gamma_{1a} \quad i=2 \quad \therefore \frac{d\sigma_{12}}{dx_1} + \frac{d\sigma_{22}}{dx_2} + \frac{d\sigma_{32}}{dx_3} + \rho b_2 = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + 2 + \rho b_2 = 0$$

$$\Rightarrow \rho b_2 = -2$$

$$\cdot \Gamma_{1a} \quad i=3 \quad \therefore \frac{d\sigma_{13}}{dx_1} + \frac{d\sigma_{23}}{dx_2} + \frac{d\sigma_{33}}{dx_3} + \rho b_3 = 0$$

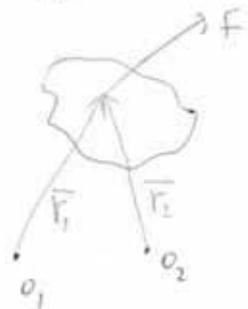
$$\Rightarrow 0 + 0 + 0 + \rho b_3 = 0$$

$$\Rightarrow \rho b_3 = 0$$

• Άρα η υποβληθείσα λύση πρέπει να έχει συνιστώσα

$$(-13x_2, -2, 0)$$

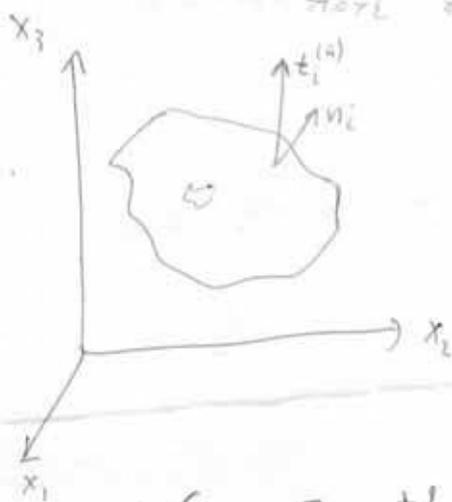
$$\sum \bar{M} = 0$$



$$\bar{M}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{F}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_2 &= \bar{r}_2 \times \bar{F} = (\bar{r}_1 + \overrightarrow{o_2 o_1}) \times \bar{F} = \\ &= \bar{r}_1 \times \bar{F} + \overrightarrow{o_2 o_1} \times \bar{F} \end{aligned}$$

Αν $\bar{r}_1 \times \bar{F} = 0$ και βάλω $\bar{M}_2 = 0$, τότε $\bar{F} = 0$,
 άρα πρέπει να πάρω "ποσότητες" ως προς αναφοράς
 που είναι άμεση, άρα να είναι $\sum \bar{F} = 0$.



$$\oint_S \epsilon_{ijk} \cdot x_j \cdot t_k^{(i)} dS + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0$$

$$\int_S \bar{x} \times \bar{t}^{(i)} dS + \int_V \bar{x} \times \rho \bar{b} dV = 0$$

~~Σ3 Σ4~~

$\epsilon_{ijk} =$ +1 όρθια τριάδα
 -1 αντίστροφη
 0 αν 2 είναι ίδια ($i=j$ ή $j=k$)

$$\epsilon_{ijk} \cdot x_j \cdot t_k^{(i)} = \epsilon_{i1k} n_1 t_k^{(i)} + \epsilon_{i2k} n_2 t_k^{(i)} + \epsilon_{i3k} n_3 t_k^{(i)}$$

$$\begin{aligned} &+ \epsilon_{i11} \cdot n_1 t_1^{(i)} & + \epsilon_{i21} \cdot n_2 t_1^{(i)} & + \\ &+ \epsilon_{i12} \cdot n_1 t_2^{(i)} & + & + \\ &+ \epsilon_{i13} \cdot n_1 t_3^{(i)} & + & + \end{aligned}$$

$$\textcircled{A} \left(\int_S \epsilon_{ijk} \cdot x_j \cdot n_e \cdot \sigma_{ek} \cdot dS \right) + \int_V \epsilon_{ijk} \cdot x_j \cdot \rho b_k = 0$$

|| (Θ Gauss)

$$\Rightarrow \int_V \epsilon_{ijk} \cdot \frac{d(x_j \sigma_{ek})}{dx_e} dV + \int_V \epsilon_{ijk} \cdot x_j \cdot \rho b_k = 0$$

$$\frac{d(x_j \sigma_{ek})}{dx_e} = \frac{dx_j}{dx_e} \cdot \sigma_{ek} + x_j \cdot \frac{d\sigma_{ek}}{dx_e} =$$

$$\begin{aligned} \sigma_{jk} &= \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \\ &= \sigma_{jk} + x_j \cdot \sigma_{ek,e} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_V \epsilon_{ijk} \cdot (\sigma_{jk} + x_j \cdot \sigma_{ek,e} + x_j \cdot \rho b_k) dV = 0$$

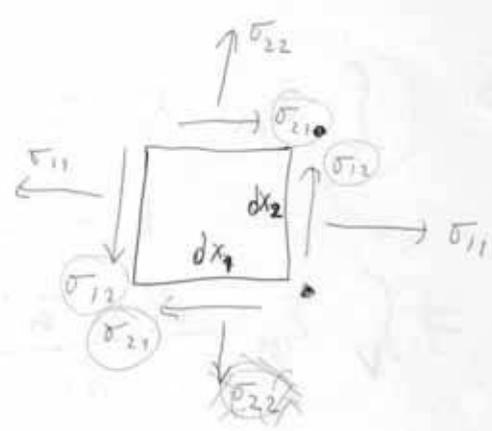
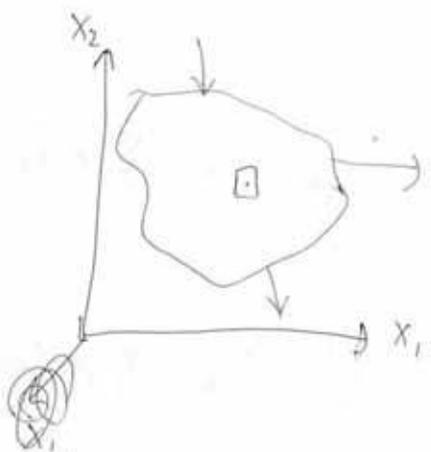
$$\Rightarrow \int_V \epsilon_{ijk} \left[\sigma_{jk} + x_j (\sigma_{ek,e} + \rho b_k) \right] dV = 0 \quad (\text{SF} = 0)$$

$$\Rightarrow \int_V \epsilon_{ijk} \cdot \sigma_{jk} dV = 0$$

$$\sigma_{ijk} \cdot \sigma_{jk} = 0 \quad \swarrow \sum \epsilon_{ijk} \text{ isoproprietat}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{jk} - \sigma_{kj} = 0} \quad \begin{aligned} &\text{Este este si rezultatul } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ &\text{si este rezultatul } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \end{aligned}$$

$$\textcircled{B} \epsilon_{ijk} \cdot \sigma_{jk} + \epsilon_{ikj} \cdot \sigma_{kj} = 0$$



$$\frac{d\sigma_{11}}{dx_1} + \frac{d\sigma_{21}}{dx_2} + \rho b_1 = 0$$

$$\frac{d\sigma_{12}}{dx_1} + \frac{d\sigma_{22}}{dx_2} + \rho b_2 = 0$$

$$\uparrow \sigma_{12} \cdot dx_2 \cdot dx_1 \quad \uparrow$$

$$\sigma_{21} \cdot dx_2 \cdot dx_1 \quad \downarrow$$

Συναρτήσεις των τάσεων να είναι συνεχόμενες
 (π.χ. λόγω της συνέχειας του υλικού)

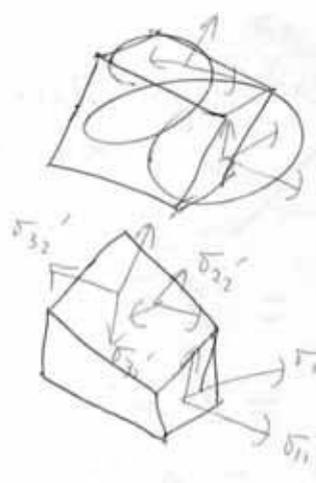
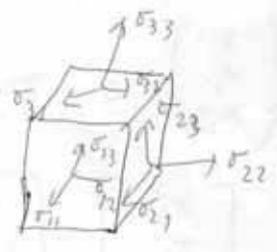
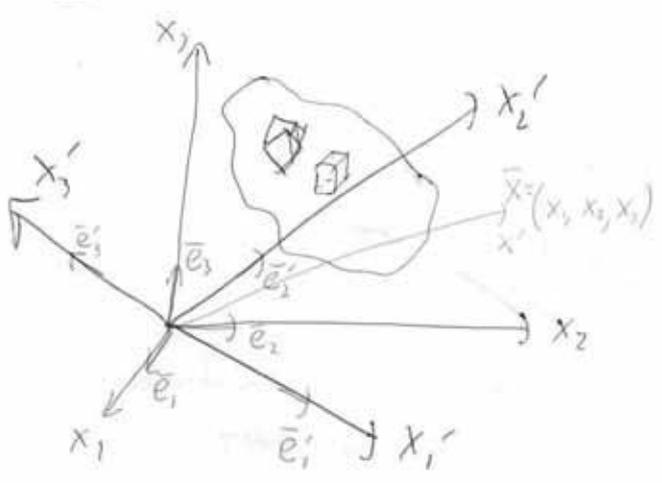
• 0, Συναρτήσεις των τάσεων να είναι συνεχόμενες •

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_i} = 0 : \text{κρίση ομογενούς παραμόρφησης χωρίς}$$

καθολικής στρέψης (απόδοσης) των οφίων των κομμάτιων

$$\left(\text{ομογενής παραμόρφηση} = \text{const} \neq \frac{d\sigma_{ij}}{dx_i} = 0 \right)$$

Μετασχηματισμός τάσεων



$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$T' = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix}$$

17-11-08

$T = T^T \Rightarrow T$: συμμετρικός

• Τα διαγώνια στοιχεία είναι σφαιρικά τάσεις και τα υπόλοιπα είναι τασίσεις

• $T \neq T'$ ($\xi \neq \xi'$)

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1$	$\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2$	$\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_3$
x_2'	$\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_1$	$\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_2$	$\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_3$
x_3'	$\bar{e}_3' \cdot \bar{e}_1$	$\bar{e}_3' \cdot \bar{e}_2$	$\bar{e}_3' \cdot \bar{e}_3$

$$= A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

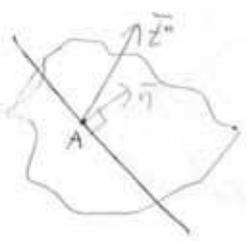
Πίνακας μετασχηματισμού Εσωτερικών Διατεταγμένων

$$A \cdot A^T = I \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \bar{x}' = A \cdot \bar{x}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



Πρέπει να βρούμε τον προσανατολισμό του σημείου που ελέγχει η τάση.

$$\bar{z}^n = \sum \bar{n}$$

$$\bar{z}^{n'} = \sum \bar{n}'$$

$$\bar{z}^{n'} = A \cdot \bar{z}^n$$

$$\bar{n}' = A \cdot \bar{n}$$

$$\Rightarrow \sum \bar{n}' = A \cdot \bar{z}^n = A \cdot \sum \bar{n}$$

$$\Rightarrow \sum A \cdot \bar{n} = A \cdot \sum \bar{n}$$

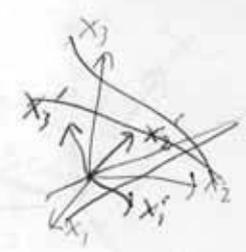
$$\Rightarrow (\sum A - A \sum) \cdot \bar{n} = 0 \quad \forall \bar{n} = const.$$

$$\Rightarrow \sum A - A \sum = 0$$

$$\Rightarrow \sum = A \sum^T \quad \text{Ταυτότητα 2^{ης} τάξης. Το \bar{n} παραμένει αμετάβλητο.}$$

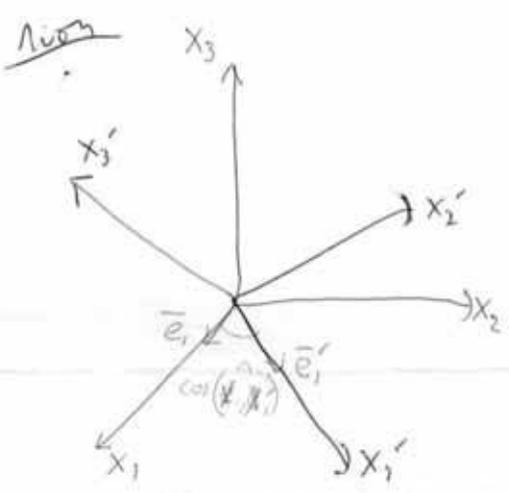
Άσκηση 1

Έχουμε τον τελεστή $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$



και τον πίνακα μετασχηματισμού $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

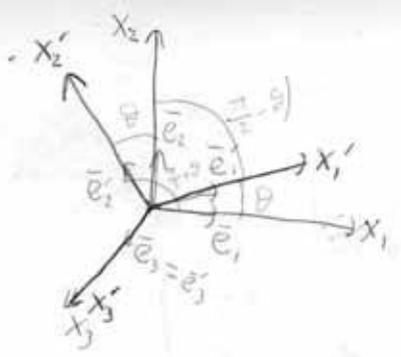
Να βρείτε τον τελεστή του τελεστή ως προς το κανονικό σύστημα συντεταγμένων x'_1, x'_2, x'_3 .



$\Sigma' = A \cdot \Sigma \cdot A^T$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



Προσπαθήστε το κλίμακα x_1, x_2 (x'_1, x'_2) γύρω από x_3 .

$A = [\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j]$

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Η x_3 παραμένει $\frac{1}{2}$ με άλλες τους αξίες

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (over known values)

Αρα αν $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$

τότε $\Sigma' = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} \cdot \cos^2\theta + \sigma_{21} \cdot \sin\theta \cos\theta & \sigma_{12} \cdot \cos^2\theta + \sigma_{22} \cdot \sin\theta \cos\theta \\ -\sigma_{11} \cdot \sin\theta \cos\theta + \sigma_{21} \cdot \cos^2\theta & -\sigma_{12} \cdot \sin\theta \cos\theta + \sigma_{22} \cdot \cos^2\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$

$= \dots \dots \dots (\sigma_{12} = \sigma_{21}) \dots \dots \dots =$

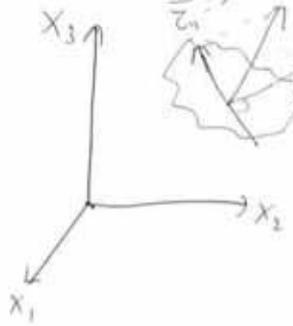
$\begin{cases} \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \Leftrightarrow \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{cases}$

άρα για το $\sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cdot \cos 2\theta + \sigma_{21} \cdot \sin 2\theta$
 $\sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cdot \cos 2\theta + \sigma_{21} \cdot \sin 2\theta$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \Sigma^T$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (αλληλοσυστηματική τάση) (αλληλοσυστηματική τάση)

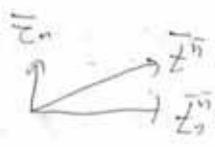


$$\bar{t}_n = \bar{t} \cdot \bar{n} =$$

$$= \bar{n}^T \cdot \Sigma \cdot \bar{n} =$$

$$= \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow ορθή τάση $\bar{t}_n = n_1^2 \cdot \sigma_{11} + 2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \sigma_{12} + 2 \cdot n_1 \cdot n_3 \cdot \sigma_{13} + n_2^2 \cdot \sigma_{22} + n_3^2 \cdot \sigma_{33}$



Αισθητική τάση : $\bar{t}_n^2 = (\bar{t})^2 - (\bar{t}_n)^2$

Κρίσιμες κατευθύνσεις : JW έχουμε διατηρητικές τάσεις

$$\bar{n} \parallel \bar{t}_n$$

$\bar{t} = \Sigma \cdot \bar{n} = \bar{t}_n = \sigma \cdot \bar{n}$
Από Cauchy

$$\Rightarrow \bar{t}_n = \bar{t}_n = \sigma \cdot \bar{n}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Η πιο εύκολη
γύρω από
τη συνιστώσα
(σφαιρική συμμετρία)

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_{11} - \sigma) \cdot \eta_1 + \sigma_{12} \cdot \eta_2 + \sigma_{13} \cdot \eta_3 = 0 \\ \sigma_{21} \cdot \eta_1 + (\sigma_{22} - \sigma) \cdot \eta_2 + \sigma_{23} \cdot \eta_3 = 0 \\ \sigma_{31} \cdot \eta_1 + \sigma_{32} \cdot \eta_2 + (\sigma_{33} - \sigma) \cdot \eta_3 = 0 \end{cases}$$

όπου $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \sigma$

Για τη χαρακτηριστική λύση θέτουμε

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = 0$$

\Rightarrow βρίσκουμε το σ που είναι μέτρο της τάσης, ώστε να έχω λύση για η_1, η_2, η_3 .

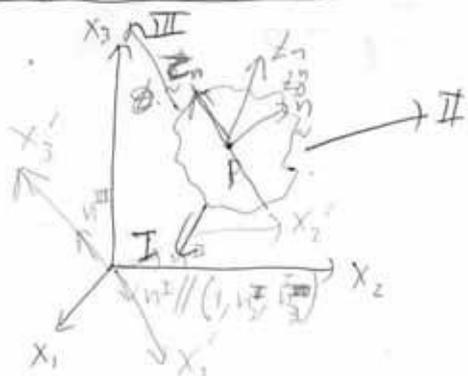
Κάθε λύση προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο, άρα έχουμε δύο λύσεις.

• Όπως το \bar{n} είναι μοναδιαίο $\Rightarrow \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$

• Άρα τώρα έχουμε 3 εξισώσεις με 3 άγνωστους

• Τα η_1, η_2, η_3 τα παίρνουμε έτσι (πρόσημα) ώστε να δημιουργείται δεξιόστροφο σύστημα.

Κύριες τάσεις και κύριες διωθύνουσες



$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{Sym} & & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\tau}}_{\underline{\underline{n}}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$$

$$\underline{\underline{\tau}}_{\underline{\underline{n}}} = \sigma \cdot \underline{\underline{n}} \quad \text{οπότε τάση} = \sigma \cdot \underline{\underline{n}}$$

$$\underline{\underline{\tau}}_{\underline{\underline{n}}} = \text{διασταθμική τάση}$$

Υπάρχουν 3 κατωθύνουσες που $\tau_n = 0$

$$\underline{\underline{\tau}}_n = \sigma \cdot \underline{\underline{n}}$$

$$\underline{\underline{\tau}}_n = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \sigma \cdot \underline{\underline{n}} = \sigma \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{n}}$$

$$\Rightarrow \left(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}} \right) \cdot \underline{\underline{n}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \text{Sym} & & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{n}} = 0$$

Άρα $\underline{\underline{n}} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ και έχουμε

$$\left(\sigma_{11} - \sigma \right) \cdot n_1 + \sigma_{12} \cdot n_2 + \sigma_{13} \cdot n_3 = 0$$

$$\sigma_{21} \cdot n_1 + \left(\sigma_{22} - \sigma \right) \cdot n_2 + \sigma_{23} \cdot n_3 = 0$$

$$\sigma_{31} \cdot n_1 + \sigma_{32} \cdot n_2 + \left(\sigma_{33} - \sigma \right) \cdot n_3 = 0$$

Για μη τριωδική λύση δίδω

$$\det(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) = 0$$

Ξέρω ακόμα ότι $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

• Βρίσκω κυλιού στίσιες τας τας

$$\sigma^3 - I_{\Sigma} \sigma^2 + II_{\Sigma} \sigma - III_{\Sigma} = 0$$

$$I_{\Sigma} = \sigma_{ii} = \epsilon_v \Sigma$$

$$II_{\Sigma} = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij})$$

$$III_{\Sigma} = |\sigma_{ij}| = \det \Sigma$$

Αντιστοιχίες

• Άρα σταθερές διωδύνας στο χώρο ανεξαρτήτως συνστήματος.

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & \sigma_{13}' \\ & \sigma_{22}' & \sigma_{23}' \\ & & \sigma_{33}' \end{bmatrix}$$

Άρα

$$I_{\Sigma} = \sigma_{ii}'$$

$$II_{\Sigma} = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}' \sigma_{jj}' - \sigma_{ij}' \sigma_{ij}')$$

$$III_{\Sigma} = \det \Sigma' = |\sigma_{ij}'|$$

• Σίτωση (ίσση) $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

Αντιστοιχούν σε n^I, n^{II}, n^{III} διωδύνας.

Άσκηση 1

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma$$

• Να βρεθούν οι κύριες τιμές και κατά σειρά.

$$\text{Λύση} \quad |\sigma_{ij} - \sigma I| = \begin{vmatrix} 3-\sigma & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\sigma)\sigma^2 + 2 + 2 + \sigma - 4(3-\sigma) + \sigma = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma^3 + 3\sigma^2 + 4 + \sigma - 12 + 4\sigma + \sigma = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^3 - 3\sigma^2 - 3\sigma + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma+2)(\sigma-4)(\sigma-1) = 0$$

(6) (από επανάγ. του πίνακα)

$$\left[\begin{array}{l} \text{• } \sigma^3 - I_2 \cdot \sigma^2 + II_2 \cdot \sigma - III_3 = 0 \\ \text{• } I_2 = 3 \\ \text{• } II_2 = \frac{1}{2} (I_2^2 - \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij}) = \\ \quad = \frac{1}{2} (9 - 3^2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2^2) = \\ \quad = -6 \\ \text{• } III_2 = \det = -8. \end{array} \right.$$

$$\text{• Άρα } \begin{array}{l} \sigma_I = 4 \\ \sigma_{II} = 1 \\ \sigma_{III} = -2 \end{array} \quad (\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III})$$

Για να έχουμε τις διατιθέσιμες τιμές του σ

$$|\Sigma - \sigma I| \cdot n = 0$$

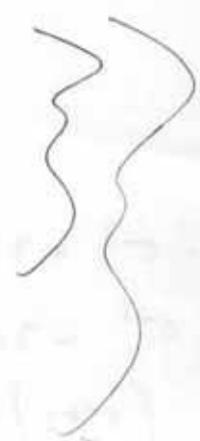
$$\sigma_I = 4 \quad |\Sigma - 4I| \cdot \tilde{n}^I = \begin{bmatrix} 3-4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^I \\ n_2^I \\ n_3^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (3-4) \cdot n_1^I + n_2^I + n_3^I = 0$$

$$n_1^I - 4n_2^I + 2n_3^I = 0$$

$$n_1^I + 2n_2^I - 4n_3^I = 0$$

$$n_1^I + n_2^I + n_3^I = 1$$



$$\Rightarrow n_1^I = -2/\sqrt{6}$$

$$n_2^I = -1/\sqrt{6}$$

$$n_3^I = -1/\sqrt{6}$$

$$n_1^I + n_2^I + n_3^I = 1$$

Ομοίως για $\sigma_{II} = 1$ έχουμε $n_1^{II} = 1/\sqrt{3}$

$$n_2^{II} = -1/\sqrt{3}$$

$$n_3^{II} = -1/\sqrt{3}$$

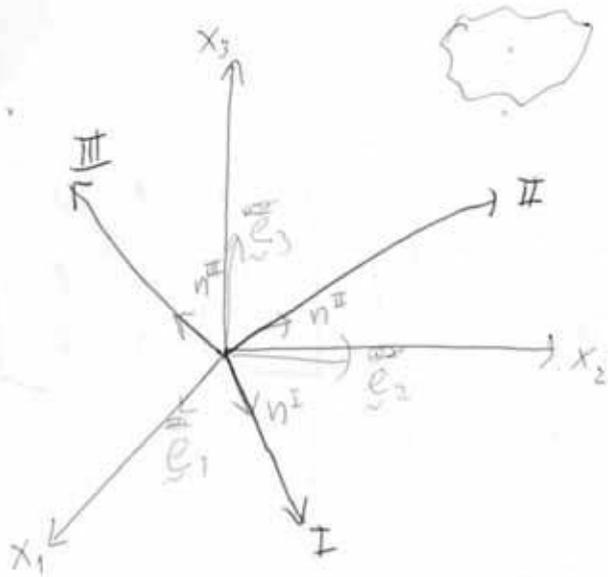
και για $\sigma_{III} = -2$ έχουμε

$$n_1^{III} = 0$$

$$n_2^{III} = 1/\sqrt{2}$$

$$n_3^{III} = -1/\sqrt{2}$$





$$\Sigma^* = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

- Επειδή στο σύστημα είναι ορθόγωντες και οι αυξήσεις τιμές.
- Αρα παίρνουμε αυτές τις τιμές που έχουμε δεξιόστροφο σύστημα, άρα πρέπει $n^I \times n^{II} = n^{III}$

ή $(n^I \cdot n^{II} \cdot n^{III}) = 1$ (πρώτη πρόσημο-επιλογή).

	\tilde{e}_1	\tilde{e}_2	\tilde{e}_3
\tilde{v}^I	$\tilde{e}_1 \cdot n^I$	$\tilde{e}_2 \cdot n^I$	$\tilde{e}_3 \cdot n^I$
\tilde{v}^{II}	$\tilde{e}_1 \cdot n^{II}$	$\tilde{e}_2 \cdot n^{II}$	$\tilde{e}_3 \cdot n^{II}$
\tilde{v}^{III}	$\tilde{e}_1 \cdot n^{III}$	$\tilde{e}_2 \cdot n^{III}$	$\tilde{e}_3 \cdot n^{III}$

Πίνακας A: πίνακας μετατροπής από το ένα σύστημα στο άλλο.

• $A = \begin{bmatrix} n_1^I & n_2^I & n_3^I \\ n_1^{II} & n_2^{II} & n_3^{II} \\ n_1^{III} & n_2^{III} & n_3^{III} \end{bmatrix}$ μετατροπή από ένα σύστημα στο άλλο.

$$= \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\Sigma^* = A \cdot \Sigma \cdot A^T$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Πρέπει να ελεγχθώ αν είναι ορθογώνια.

• Αν $\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}$ (συνιστώσες διατεταγμένες)
(συνιστώσες διατεταγμένες) $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ π.χ. υπερσφαιρικός

τότε $\tilde{v}^I \perp \tilde{v}^{II} \perp \tilde{v}^I$ (ορθογώνια διανύσματα)
Αυτό

$\Sigma \cdot \tilde{v}^I = \sigma_I \cdot \tilde{v}^I$

$\Rightarrow (\tilde{v}^{II})^T \cdot (\Sigma \cdot \tilde{v}^I) = (\sigma_I \cdot \tilde{v}^I) \cdot (\tilde{v}^{II})^T = \sigma_I \cdot (\tilde{v}^I \cdot \tilde{v}^{II})$

• Αντίστοιχα

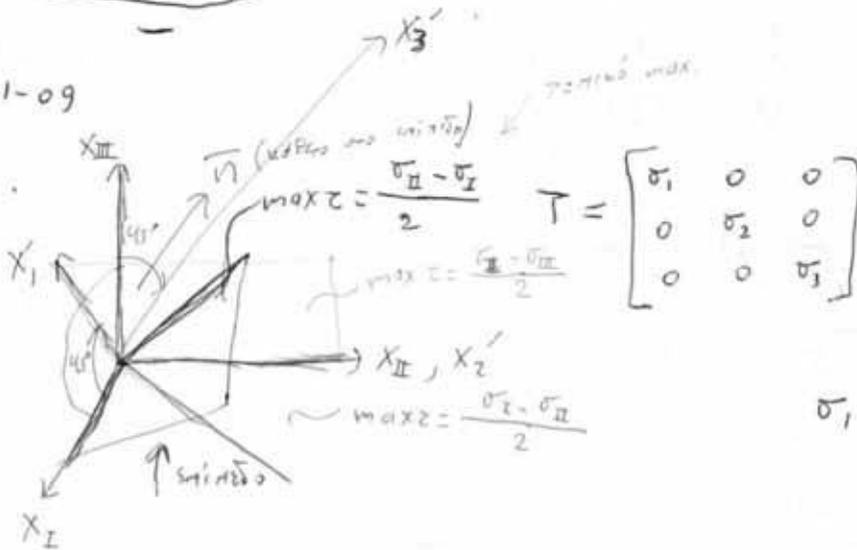
$\tilde{v}^I \cdot \Sigma \cdot \tilde{v}^{II} = \sigma_{II} \cdot \tilde{v}^{II} \cdot \tilde{v}^I$

• Λόγω ορθογώνια του Σ έχουμε
 $(\sigma_I - \sigma_{II}) \cdot \tilde{v}^{II} \cdot \tilde{v}^I = 0$

• Αν $\sigma_I \neq \sigma_{II} \Rightarrow \tilde{v}^{II} \cdot \tilde{v}^I = 0$, δηλαδή $\tilde{v}^{II} \perp \tilde{v}^I$

8-1-09

22-1-09



Ασκηση 1

Δίνεται ο πίνακας των τάσεων με κάποιο επίπεδο.

$$T = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

- Να προσδιοριστεί η max διατμητική τάση (και η ω)
- ~~Για ω να προσδιοριστεί~~
 Σημειώ ότι ~~πρέπει~~ δρά στο επίπεδο που ~~είναι~~ διχοτομεί τη διεύθυνση X_1, X_2, X_3 .
- Ο νίκος πίνακας των τάσεων (προ κανονικό σύστημα).

Λύση

Για ω κάνετε κύριες τάσεις, διαχωρίζετε τον πίνακα.

$$|T - \sigma I| = \sigma^3 - I_{\Sigma} \sigma^2 + II_{\Sigma} \sigma - III_{\Sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -6-\sigma & -12 \\ 0 & -12 & 1-\sigma \end{pmatrix}$$

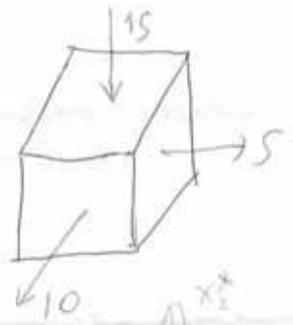
- $\sigma_I = 10$
- $\sigma_{II} = 5$
- $\sigma_{III} = -9.5$

(45°)
Συντεταγμένες

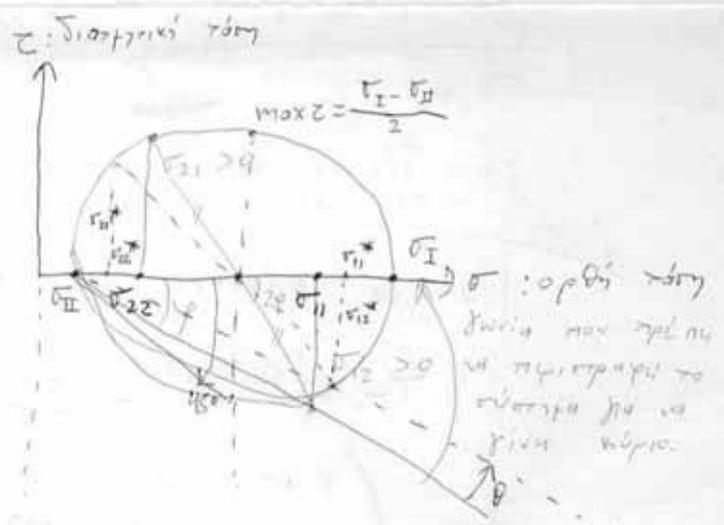
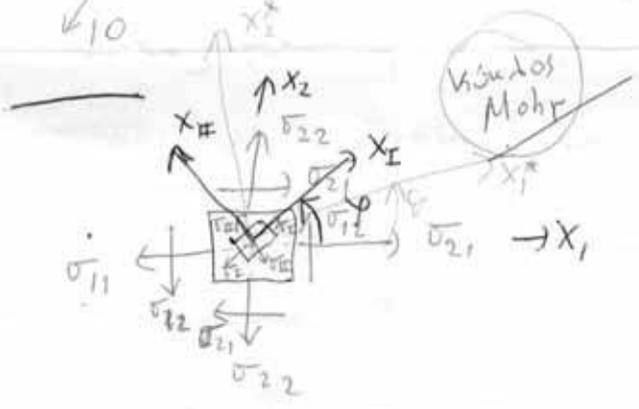
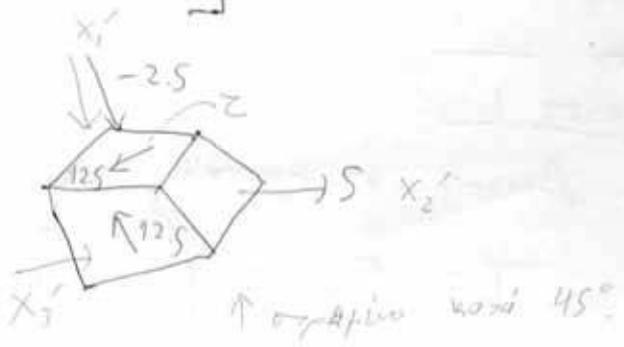
$$A = \begin{pmatrix} x_1' & x_{II} & x_{III} \\ x_2' & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ x_3' & 0 & 1 & 0 \\ & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Πίνακας μετασχηματισμού

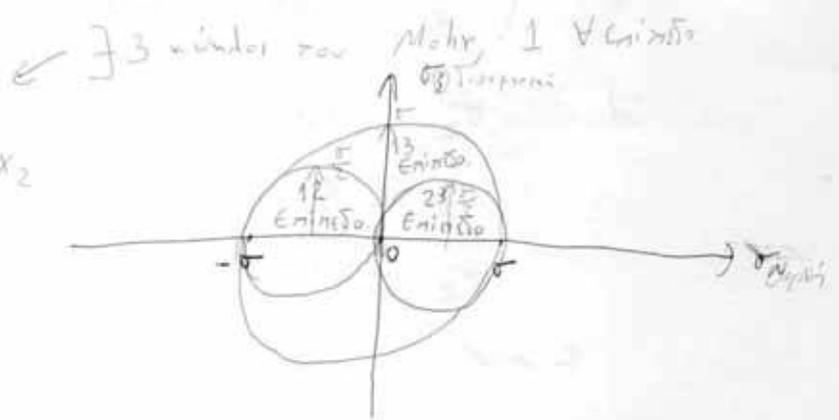
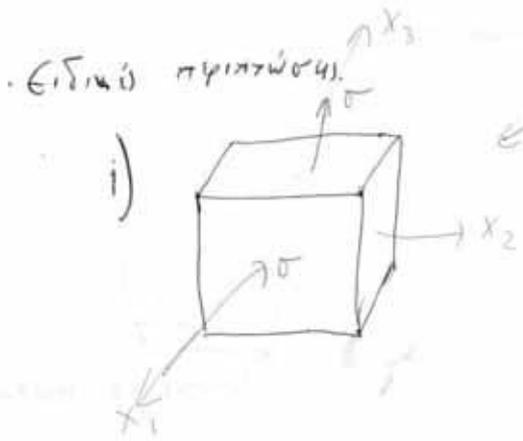
$$[\sigma_{ij}'] = A \cdot T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & -12.5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -12.5 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$



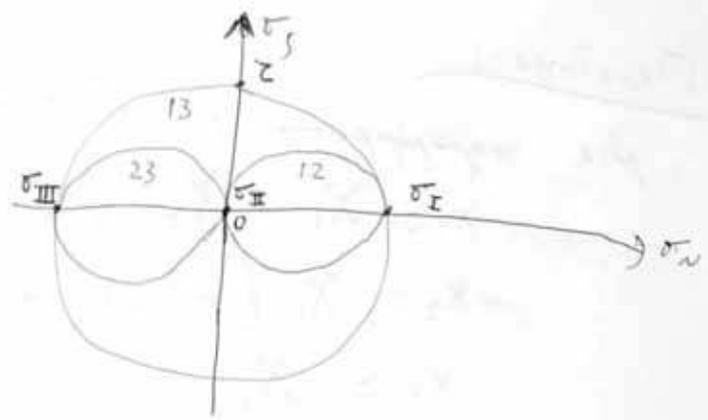
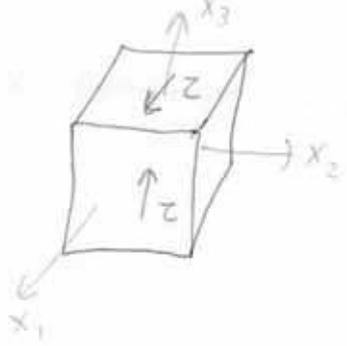
νέα σύστημα



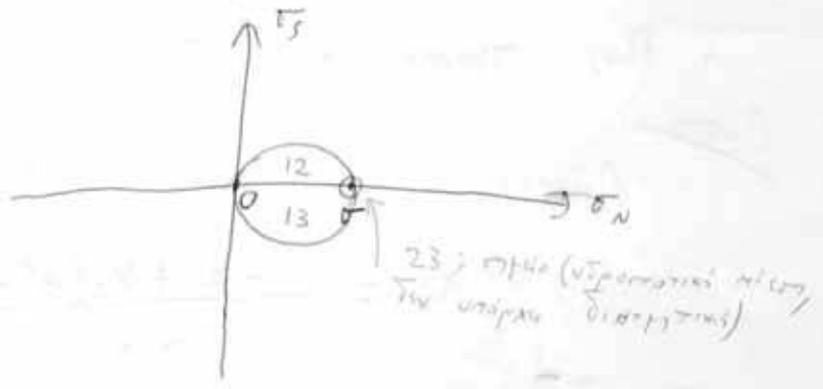
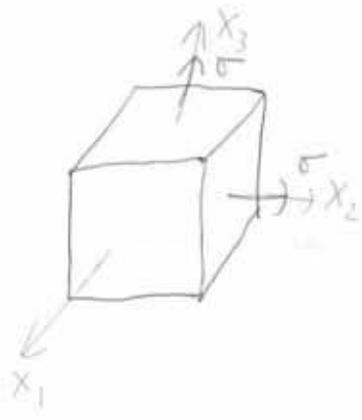
$|\sigma_{12}| = |\sigma_{21}|$ - αντιστροφή



ii).

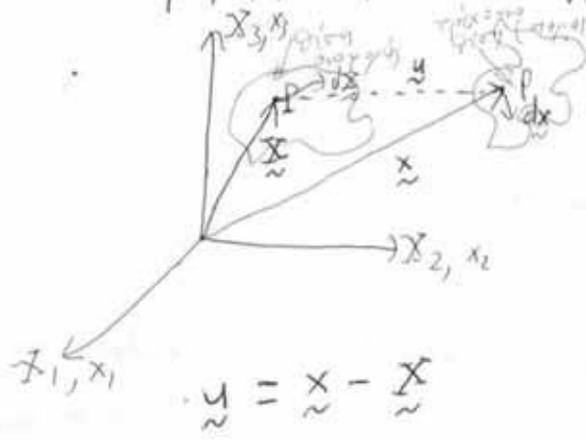


iii).



Παρατόρπωση, Τροπή

· παρατόρπωση: αλλαγή γεωμετρίας ενός σώματος (change of shape)



- $P(x_1, x_2, x_3)$: αρχική θέση σώματος (initial position of the body)
- u : μετατόπιση (displacement)
- \tilde{x} : αρχική θέση (initial position)
- x : τρέχουσα θέση (current position)

Lagrangian περιγραφή

$\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{x}, t)$

· χρησιμοποιείται για σκελετό (used for skeleton)

Euler: $\tilde{x} = \tilde{x}(x, t)$

· περιγράφει ρευστά (describes fluids)

Παράδειγμα 1

Μια παρατήρηση μας δίνεται σε περίπτωση Lagrange

$$x_1 = X_1 + X_2 \cdot (e^t - 1)$$

$$x_2 = X_1 (e^{-t} - 1) + X_2$$

$$x_3 = X_3$$

Πως περιγράφεται σε Euler?

Λύση

Λύνουμε ως προς X_i και έχουμε

$$X_1 = \frac{-x_1 + X_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}}$$

$$X_2 = \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}}$$

$$X_3 = x_3$$

Euler

~~_____~~

$$\tilde{x} = \tilde{x}(X)$$

$$\Rightarrow d\tilde{x} = \frac{d\tilde{x}}{dX} \cdot dX$$

$$F = \frac{d\tilde{x}}{dX} \Big|_{\text{βοηθίδα παρατήρησης}}$$

Αν ξέρω το $\frac{d\tilde{x}}{dX}$ μπορώ να βρω την αλλαγή της συνάρτησης $d\tilde{x}$.

$$\tilde{x} = \tilde{X} + y$$

$$\left(\frac{F}{\tilde{x}} \right) = \frac{d\tilde{x}}{dX} = I + \frac{dy}{dX}$$

βοηθία παρατήρησης

Παράδειγμα 2

- $x_1 = X_1$
- $x_2 = X_2 + A \cdot X_3$
- Λίγα $x_3 = X_3 + A X_2$

• Δίχως 7 παρατήρηση
 • Να βρεθεί 7 βέλτιστα παρατήρηση
 \tilde{F}

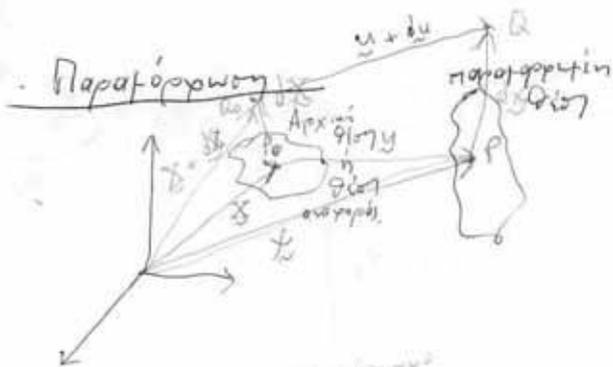
$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dX_1} & \frac{dx_1}{dX_2} & \frac{dx_1}{dX_3} \\ \frac{dx_2}{dX_1} & \frac{dx_2}{dX_2} & \frac{dx_2}{dX_3} \\ \frac{dx_3}{dX_1} & \frac{dx_3}{dX_2} & \frac{dx_3}{dX_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\tilde{I} + \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{X}}$$

⇒ η βέλτιστα παρατήρηση είναι

$$\tilde{\theta} \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y} = \tilde{x} - X$$



$$d\tilde{x} = \frac{dx}{dX} \cdot dX$$

$$F = \left. \frac{dx}{dX} \right|_P : \text{Εσθία παραμόρφωσης στο σημείο } P$$

$$(dx)^2 = d\tilde{x}^T \cdot d\tilde{x} = dx_i \cdot dx_i = \delta_{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j$$

~~(dx)^2 = dX_i \cdot dX_i~~

$$(dx)^2 = dx^T \cdot dx = d\tilde{X}^T \cdot \underbrace{F^T \cdot F}_G \cdot d\tilde{X} = d\tilde{X}^T \cdot G \cdot d\tilde{X}$$

$$dx_i = \frac{dX_i}{dX_j} \cdot dX_j$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = dx^T \cdot 2 \cdot L_G \cdot dX$$

$$\Rightarrow L_G = \frac{1}{2} (F^T \cdot F - I) : \text{Τη παραμόρφωση}$$

[Αντιστροφή παραμόρφωσης <-5% < παραμόρφωση >5% < παραμόρφωση >5%]
 ↑ ελαστική παραμόρφωση ↑ πλαστική παραμόρφωση

$$F = I + \left(\frac{du}{dX} \right) H : \text{Εσθία παραμόρφωσης}$$

$$L = \frac{1}{2} (F^T \cdot F - I) =$$

$$= \frac{1}{2} \left((I + H)^T \cdot (I + H) - I \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(I + H^T + H + H^T \cdot H - I \right) =$$

Av $H \approx 3-4\% \Rightarrow H^T \cdot H$ πολύ μικρό

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} (H^T + H) = \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dX_j} + \frac{du_j}{dX_i} \right)$$

Tower's formula

Άσκηση 1

• Πεδίο μετασχηματισμών :

$$\underline{y} = \underbrace{x_1 x_3^2}_{u_1} \underline{e}_1 + \underbrace{x_1^2 x_2}_{u_2} \underline{e}_2 + \underbrace{x_2^2 x_3}_{u_3} \underline{e}_3$$

• Να βρεθεί το $\underline{F}_j \underline{x}$

Λύση

$$\underline{H} = \frac{d\underline{y}}{d\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_3^2 & 0 & 2x_1 x_3 \\ 2x_1 x_2 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 2x_2 x_3 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \underline{\tilde{x}} + \underline{y}$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{x}}{d\underline{\tilde{x}}} = \underline{I} + \frac{d\underline{y}}{d\underline{\tilde{x}}}$$

$$\Rightarrow \underline{F} = \underline{I} + \underline{H} = \begin{pmatrix} 1+x_3^2 & 0 & 2x_1 x_3 \\ 2x_1 x_2 & 1+x_1^2 & 0 \\ 0 & 2x_2 x_3 & 1+x_2^2 \end{pmatrix}$$

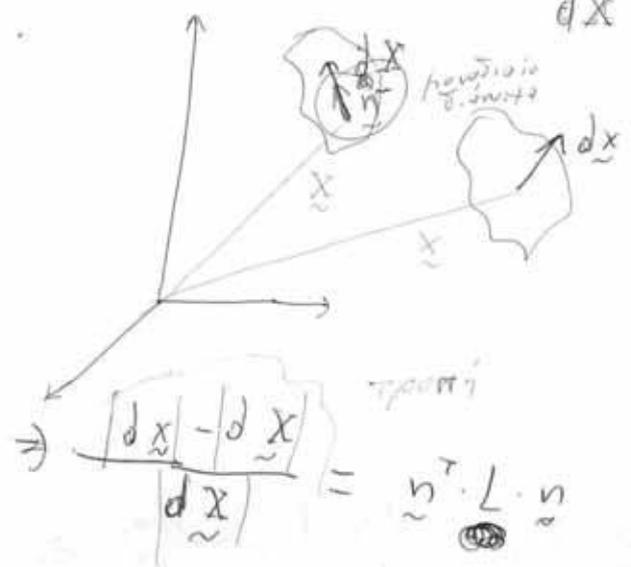
↓ τομή (symmetrization)

$$\underline{L} = \frac{1}{2} (\underline{H}^T + \underline{H})$$

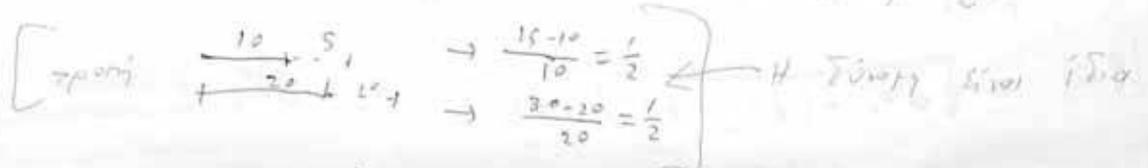
• Γραμμική μεσοτιμότητα (απειροστή)

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} x_3^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_1 x_2 & x_1^2 & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

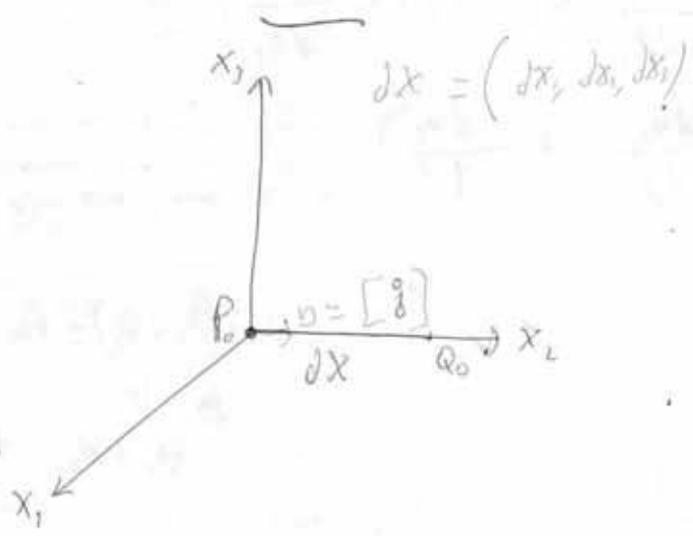
$$\frac{(dx)^2 - (dX)^2}{dx^2} = \frac{(dx - dX)(dx + dX)}{dx^2} = \frac{dX^T}{dX} \cdot 2 \cdot \frac{dX}{dX} \approx 2 \frac{dX}{dX}$$



$$dx \approx dX + d(dx)$$



Η δύναμη στην κατεύθυνση του άξονα x2 είναι 1/2



$$dx = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{dx_3}{dx} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dx} = 1$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ & l_{22} & l_{23} \\ & & l_{33} \end{pmatrix}$$

Symmetrική

$$\frac{dx - dX}{dX} = n^T \cdot L \cdot n = l_{22} = \frac{\partial \epsilon_2}{\partial X_2}$$

Τα διαγώνια στοιχεία είναι όσον αφορά στον άξονα x2

29-1-09

(37)

Ασκ. 3
 $\hat{u} = (x_1 - x_3)^2 \cdot \hat{e}_1 + (x_2 + x_3)^2 \cdot \hat{e}_2 \oplus -x_1 x_2 \hat{e}_3$

i) Να βρεθεί ο τανυστής τής τροπής.

Λύση
 1) $E = \frac{1}{2} \cdot (H^T + H) =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) \\ & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \right) \\ & & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \text{ Sym}$$

$$H = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_3) & \frac{1}{2} \left(\frac{0}{-2(x_1 - x_2) + 0} \right) & \frac{-2(x_1 - x_3)}{2} \left(\frac{0 - x_2}{0 - x_2} \right) \\ 0 & 2(x_2 + x_3) & \frac{2(x_2 + x_3)}{2} \left(\frac{1 - x_1}{1 - x_1} \right) \\ -x_2 & \cancel{-x_1} & -x_1 \quad 0 \end{bmatrix}$$

• Στο σημείο $P(0, 2, -1)$ έχουμε

~~$$E(P) = \begin{bmatrix} 2(0-2) & \frac{1}{2}(-2(0-2)+0) & \frac{1}{2}(-2) \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 0 \end{bmatrix} \text{ Sym}$$~~

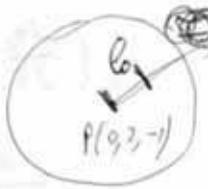
$$E(P) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Να βρεθεί η τροπή στο σημείο $P(0, 2, -1)$ και στην κατεύθυνση $\vec{v} = (8\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 4\hat{e}_3)$

Λύση

$$E_p^{(v)} = \vec{v}^T \cdot E \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8/9 \\ -1/9 \\ 4/9 \end{bmatrix} = -\frac{6}{81}$$

$|\vec{v}| = 9$



$$\frac{l-l_0}{l_0} = \epsilon_p^{(v)}$$

κατεύθυνση κατεύθυνση

iii) Δύο μονοδιαία διανύσματα του αδιαφοροποίητου (αρχικός) σημείου

$$\hat{v} = (8\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 4\hat{e}_3) / 9$$

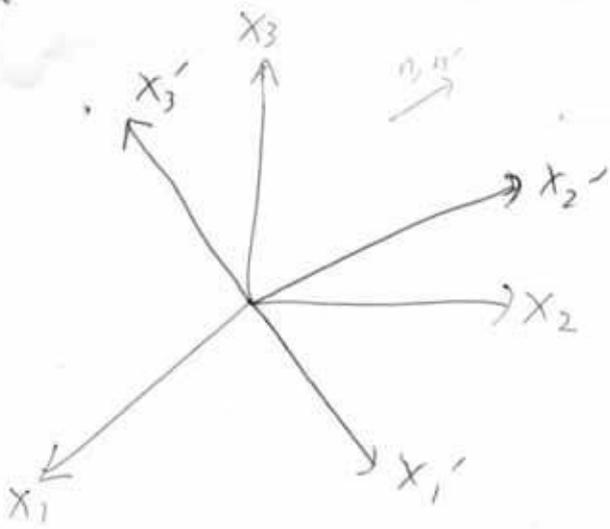
$$\hat{\mu} = (4\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 - 7\hat{e}_3) / 9$$



Να βρεθεί η φάση της αρχικής ορθής γωνίας.

$$E_p = \vec{v}^T \cdot 2 \cdot E \cdot \hat{\mu} = \frac{318 \gamma}{81} \text{ rad} \left(\begin{matrix} \text{Υπεροδική} \\ \text{πλάτη γωνία} \end{matrix} \right)$$

$\gamma = 10^{-2}$
συχνότητα στο ηλεκτρικό πεδίο



πίνακας μετασχηματισμού

$$\cdot n' = A \cdot n$$

$$\cdot n^T \cdot E \cdot n = n'^T \cdot E' \cdot n'$$

Αν εξομοιωθεί το του συστήματος
συμμετασχηματισμών.

||

$$n^T \cdot A^T \cdot E' \cdot A \cdot n =$$

$$= n^T \cdot E \cdot n$$

$$\Rightarrow \cdot n^T \cdot (A^T \cdot E' \cdot A - E) \cdot n = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \cdot A^T \cdot E' \cdot A = E$$

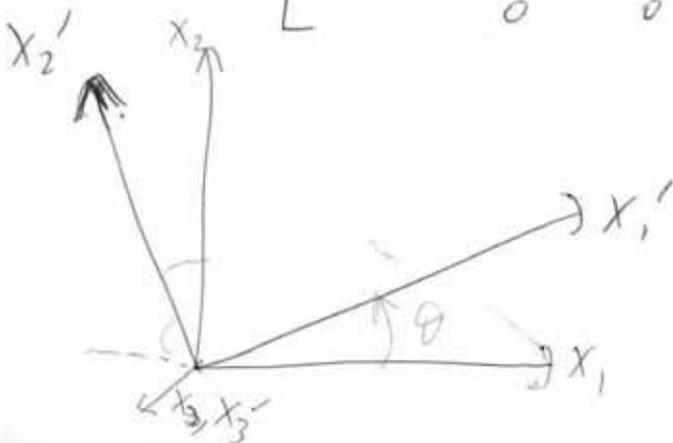
$$\Rightarrow \cdot E' = (A^T)^{-1} \cdot E \cdot A^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{E' = A \cdot E \cdot A^T}$$

• O A είναι ορθογώνιος $\Rightarrow A \cdot A^T = I$

Επίπεδη παρατόρσηση

$$\cdot E = \begin{bmatrix} \text{---} & u_{11} & u_{12} & 0 \\ & u_{21} & u_{22} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{---} \quad E = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\cdot A = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1' & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ x_2' & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ x_3' & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

πχ: Κύριες τρομές

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(E - \varepsilon I) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^3 - I\varepsilon^2 + II\varepsilon - III\varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 3 & -2 \\ 3 & 1-\varepsilon & -2 \\ -2 & -2 & 6-\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^3 - 8\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 32 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = -2$$

$$\varepsilon_2 = 2$$

$$\varepsilon_3 = 8$$

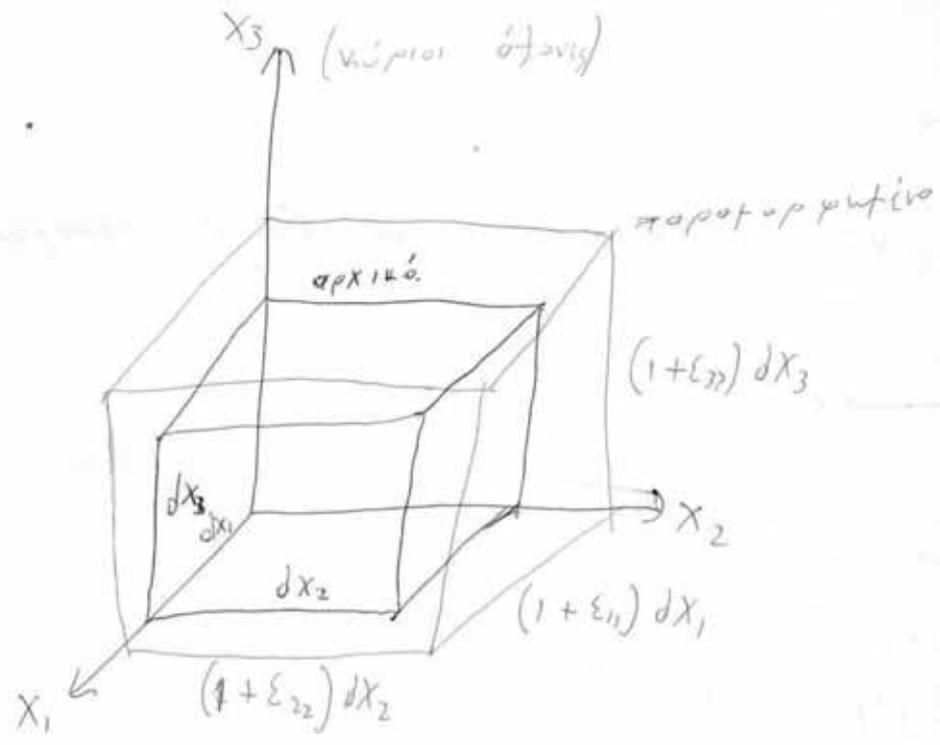
$$\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

$$A_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$I_\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

↑ Ανισότητες

1/χως

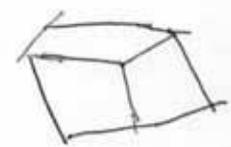
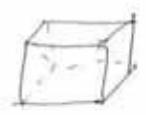
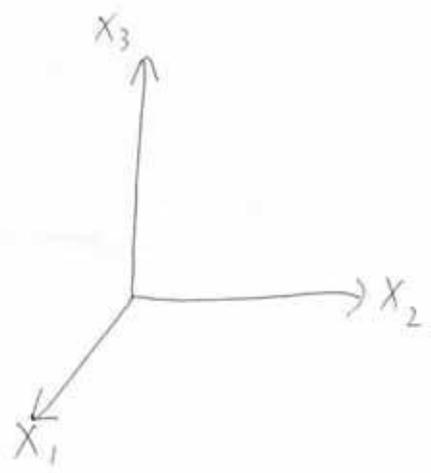


Από ο όγκος $V' = (1 + \epsilon_{11}) \cdot (1 + \epsilon_{22}) \cdot (1 + \epsilon_{33}) dx_1 dx_2 dx_3$
 $= (1 + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} + \text{αγνοούμενα}) \cdot V$

$$\frac{V' - V}{V} = \frac{(1 + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \cdot V - V}{V} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = I_{\epsilon}$$

Από ήτοι
όγκος

Ανοδοίωτο.

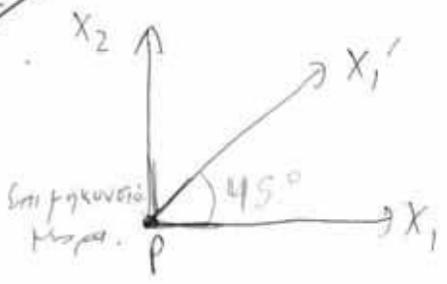


αλλοίωση
μέγεθ

$$\frac{V' - V}{V} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

Ροζέτες

π.χ.



• Θέλουμε να έχουμε παραμόρφωση στο στέρεο ρ.

- $\epsilon_{11} = 5 \cdot 10^{-4}$
- $\epsilon_{22} = 7 \cdot 10^{-4}$
- $\epsilon_{1'1'} = 4 \cdot 10^{-4}$

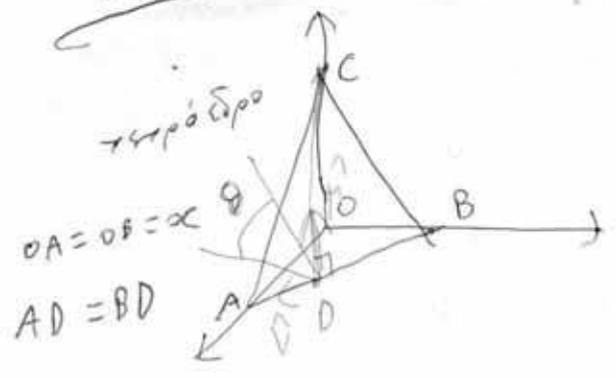
$$E = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

μαθηματικό του $x_1' = (1, 1)/\sqrt{2}$.

$$4 \cdot 10^{-4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-4} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & 7 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{12} = -2 \cdot 10^{-4}$$

Άσκηση 1



$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.005 & 0 \\ -0.005 & 0.02 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & -0.03 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί η γωνία αλλαγής της ορθής γωνίας $\hat{A}\hat{D}\hat{C}$.

Λύση

$$\hat{v} = \frac{\hat{e}_1 - \hat{e}_2}{\sqrt{2}}$$

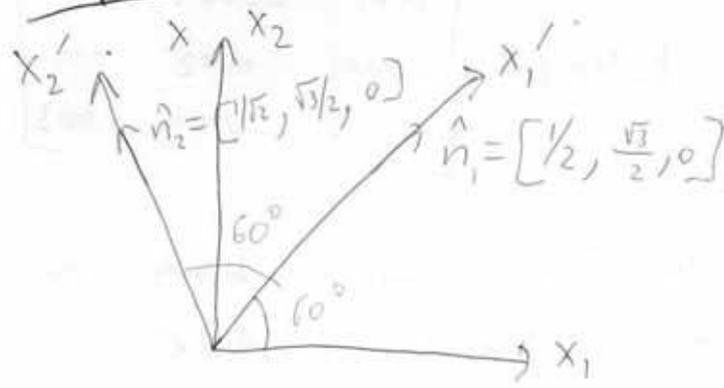
$$\hat{f} = \frac{2\hat{e}_3 - \hat{e}_2 - \hat{e}_1}{\sqrt{6}}$$

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.02 & -0.01 & 0 \\ -0.01 & 0.4 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & -0.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$= -0.01/\sqrt{3} \text{ rad}$$

$$\delta_{\mu\nu} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Άσκ. 2



- Να βρωτε ο τανυστας
- $\epsilon_{11} = \alpha$
- $\epsilon_{11}' = \beta$
- $\epsilon_{11}'' = \gamma$

Λυση

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_{12} + 3 \epsilon_{22} = 4\beta - \alpha$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma$$

$$\Rightarrow -2/\sqrt{3} \epsilon_{12} + 3 \epsilon_{22} = 4\gamma - \alpha$$

• Άρα $\epsilon_{12} = \frac{\beta - \gamma}{\sqrt{3}}$

$$\epsilon_{22} = \frac{-\alpha + 2\beta + 2\gamma}{3}$$

Γωπίουτε : σ_{ij} τάσεις

ϵ_{ij} παραρ.

$$\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij})$$

Ελαστικό υλικό ΔΕΝ έχει μνήμη (πρώτο ελαστικό)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{dy_i}{dx_j} + \frac{dy_j}{dx_i} \right)$$

$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{km}$ ^{2ος νόμος} ; Νόμος Hook
2ος νόμος τάσης ↑ τάσεις υλικού τάσης (81 στοιχεία)

$$\sigma_{11} = \sigma_1$$

$$\sigma_{22} = \sigma_2$$

$$\sigma_{33} = \sigma_3$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_4$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_5$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_6$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \text{ δίδονται } \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad \text{Ⓢ}$$

Αρτιστοιχία $\sigma \leftrightarrow \epsilon$

$$\sigma_k = C_{km} \cdot \epsilon_m \quad , \quad k = 1, \dots, 6$$

2ος νόμος (Πίνακας) m = 1, \dots, 6

Ενέργεια παραρ. από μονάδα όγκου

$$W = \frac{1}{2} \cdot C_{km} \cdot \epsilon_k \cdot \epsilon_m \quad \left(\epsilon = \frac{1}{2} u_{x^2} \right)$$

Στα ισοόγραμμα υλικά

$$\cdot [C_{nm}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & 2\mu & 2\mu \\ & & & & & & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \epsilon_{nn} + 2\mu \cdot \epsilon_{ij}$$

$$\cdot \epsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \sigma_{nn} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}$$

1-D παραμόρφωση

$$\cdot \sigma_{11} = E \cdot \epsilon_{11}$$

$$\cdot \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \cdot \epsilon_{11}$$

$$\cdot \nu \text{ (Lόγος Poisson)} = \frac{\text{εγκάρσια παραμόρφωση}}{\text{διαμήκη (αξονική)}}$$