

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \text{με } \theta > 0 \text{ άγνωστη παράμετρο.}$$

- (α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια με την μέθοδο των ροπών της παραμέτρου θ .
- (β) Να δοθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου μ. της παραπάνω κατανομής και να αποδειχτεί η αμεροληψία της.
- (γ) Να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας $g(\theta) = \frac{2\theta+1}{\theta+1}$.

ΘΕΜΑ 2:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x; \theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \text{με } \theta > 0 \text{ άγνωστη παράμετρο.}$$

- (α) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το θ και εν συνεχείᾳ για το $1/\theta$.
- (β) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του θ .
- (γ) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του $1/\theta$ και με την βοήθεια του Θεωρήματος Rao - Blackwell να δείξετε ότι είναι Α.Ε.Ε.Δ. για το $1/\theta$.

ΘΕΜΑ 3:

A) Να κατασκευάσετε ένα 95% Δ.Ε. της διαφοράς μέσων δύο ανεξάρτητων Κανονικών πληθυσμών με άγνωστες και ίσες διασπορές.

B) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Κανονική κατανομή $N(0, \theta^2)$, με $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρο. Με την βοήθεια της ανισότητας Cramer - Rao να αποδείξετε ότι η στατιστική συνάρτηση $T = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$ είναι Α.Ε.Ε.Δ. του θ^2 .

ΘΕΜΑ 4:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή Pareto με σ.π.π. $f(x; c) = \frac{a}{c} \left(\frac{c}{x} \right)^{a+1}, \quad x \geq c > 0,$

a > 0, όπου c άγνωστη και a γνωστή παράμετρος.

- (α) Να αποδείξετε ότι η $T = \min X_i, i = 1, \dots, n$, είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση για το c.
- (β) Να βρεθεί η σ.π.π. της T.

γ) Αποδείξτε ότι η $Y = -2 \cdot a \cdot n \cdot \ln \left(\frac{c}{T} \right) \sim \chi^2_2$.

δ) Κατασκευάστε ένα 95% Δ.Ε. για το c.