

$K_{\oplus 0} (0,2)$

$K_{\oplus 1} (0,0)$

$K_{\oplus 2} (0,0)$ kerp. 2.4 (oxi anoS. 0. 2.12, 9.14)

$K_{\oplus 3} (3,2,3,3)$

$K_{\oplus 4} (4,1,4,2,4,3,4,4)$

$K_{\oplus 5} (5,1)$

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2006

ΘΕΜΑ 1

a) $(\mathbb{Z}, +) \cong (5\mathbb{Z}, +)$

γ) $|G| = n \in \mathbb{N}$ c.w. $\exists H \leq G$ $|H| = d \quad \forall d | n$

π. x 1 \mathbb{Z}_n κάθε ωρξην

π. x 2 κάθε nενεραστ. παραρξησ Abel. Ολασεν

$$n = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k} \quad \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}$$

δ) $|G| = 2^n \quad H \leq G \quad |H| = n \quad n > 3$

\uparrow \ln abefavn

π. x. $G = S_n \quad H = A_n$

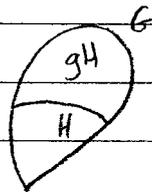
$|D_n| = 2n \quad \ln$ abefavn

$\Sigma_n = 6$ παδες

$|S_n| = n \dots$ abefavn! Δευ kas kavet!

Oute n \mathbb{Z}_n kas kavet!

e) \exists ολασεν G ke $H \leq G \quad (G:H) = 2$ c.w $H \triangleleft G$



Αναγκαστικα κανονικη ηαυ ταυσιφωρικη τα απωτερεα καε Σοξια οωρξηφοκα.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6 \text{ για } (2,3)=1$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong V_4$$

$$\mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

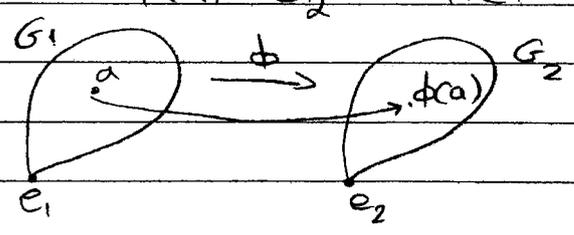
\uparrow \exists στοιχείο τάξης 4

$$\langle I \rangle$$

$$\text{ord}(I) = 4$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $G_1 \cong G_2$ και εστω $a \in G_1$ με $\text{ord}(a) = k$
 $\rightarrow \phi(a) \in G_2$ έχει $\text{ord}(\phi(a)) = k$



$$a^k = e_1 \rightarrow \phi(a^k) = \phi(\underbrace{a \dots a}_{\#k}) = \underbrace{\phi(a) \dots \phi(a)}_{\#k} = \phi(a)^k$$

$$\phi(a^k) = \phi(e_1) = e_2$$

$$[\phi(a)]^k = e_2 \Rightarrow \text{ord}(\phi(a)) \mid k$$

Εστω $\text{ord}(\phi(a)) = i \neq k$ $i \mid k$

$$[\phi(a)]^i = e_2 \stackrel{\phi^{-1}}{\Rightarrow} \phi(a^i) = e_2 \Rightarrow a^i \in \ker \phi = \{e_1\}$$

$$\phi \neq 1 \Rightarrow a^i = e_1 \text{ Άτοπο}$$

$$\{ \phi^{-1}(\phi(a^i)) = \phi^{-1}(e_2) = \{e_1\} \Rightarrow a^i = e_1 \text{ Άτοπο}$$

βλ) $G, H \triangleleft G$ ζω. $G/H \not\cong$ υποομάδα της G

$G = \mathbb{Z}$ \nmid υποομάδα της \mathbb{Z} είναι της μορφής
 $n\mathbb{Z}$ Εστω $H = k\mathbb{Z} \rightarrow G/H = \boxed{\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}}$
 $|\mathbb{Z}_k| = k$ Προσοχή!

Παρατήρηση

Οι υποομάδες της $(\mathbb{Z}, +)$ είναι κανονικές αφού η $(\mathbb{Z}, +)$ είναι αβελιανή. (3)

Όπως $\ln \mathbb{Z} = \infty$ ή n

1) Δ.ο \mathbb{Z}_7 ή n περιβ. οδο. $\phi: \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_4$

Εστω οα υπάρχει $\Rightarrow \text{Im} \phi \leq \mathbb{Z}_4 \stackrel{\text{ολ}}{\Rightarrow}$
 $|\text{Im} \phi| = \{1, 2, 4\}$

$\ker \phi \leq \mathbb{Z}_7 \stackrel{\text{ολ}}{\Rightarrow} |\ker \phi| = \{1, 7\} \Rightarrow \ker \phi = \{0\}$

Θ.οδο. $\Rightarrow \mathbb{Z}_7 / \ker \phi \cong \text{Im} \phi (=)$

$\mathbb{Z}_7 / \{0\} \cong \text{Im} \phi$ Ατομο
 $\cong \mathbb{Z}_7$

2) $\exists?$ \ln περιβ. οδο. $\phi: S_4 \rightarrow S_3$
 $\text{id} \in A_4 \rightarrow \text{id} \in A_3$
 $(12) \in A_4 \rightarrow (12) \in A_3$

S_n $A_n \leq S_n$, $|S_n| = n!$
 $|A_n| = \frac{n!}{2}$ $|S_4| = 24$
 $|S_3| = 6$

$$(a_1 a_2 a_3) = (a_1 a_2)(a_1 a_2)$$

$$(123) = (13)(12)$$

ΘΕΜΑ 3

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

jevoι τυχαί

$$\sigma = (1357)(246)(89) = (17)(15)(13)(26)(24)(89) \in A_9$$

Ergebnis einer jeden Zerlegung $\text{ord}(6) = \text{Ekl}\pi(4, 3^2)$

• av erhalte $\tau = (\underbrace{123456}_{\#6})(\underbrace{78910}_{\#4}) \in S_{10}$
 $\text{ord } \tau = \text{Ekl}\pi(6, 4) = 12$

• av erhalte $\tau = (123\overleftarrow{4}56)(78\overleftarrow{9}10) \Rightarrow$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 9 & 5 & 6 & 1 & 8 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} = (123978456)$$

$$\text{ord}(\tau) = 9$$

β) $6 = (12345)(6789) \in S_9$
 $5 + 4 = 9$

$$\Rightarrow \text{ord } 6 = \text{Ekl}\pi(5, 4) = 20$$

γ) $\nexists 6 \in S_9$ tafns 18

$$18 = \text{Ekl}\pi(\text{kurzere zwei jebur zerffung ons } 6)$$

$$18 = 2 \cdot 9 \quad \text{Atoro}$$

$$18 = \underbrace{3 \cdot 6}_{\text{Atoro}} \in \text{Ekl}\pi(3, 6) = 6$$

$$18 = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{Atoro}} \in \text{Ekl}\pi(3, 2) = 6$$

$\#3! = 6$

$$\delta) S_3 = \{ \text{id}, (123), (132), (12), (23), (13), (13)(12), (12)(13) \}$$

$$A_3 = \{ \text{id}, (123), (132) \} \triangleleft S_3$$

$$|S_3/A_3| = 2, \quad S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$$

5

$$(123)(132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \text{id} \quad \Leftrightarrow (132) = (123)^{-1}$$

$$Z(S_3) = \{g \in S_3 \mid g\tau = \tau g \quad \forall \tau \in S_3\} = \text{id}$$

$$(1,2), (1,3) \notin Z(S_3)$$

$$\left. \begin{aligned} (23)(12) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) \\ (12)(23) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2,3) \notin Z(S_3)$$

$$\left. \begin{aligned} (123)(12) &= (13)(12)(12) = (13) \\ (12)(123) &= (12)(13)(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (12,3) \notin Z(S_3)$$

Όμοια και για τον $(132) \notin Z(S_3)$

η ένωση $Z(S_3) \subset S_3$

Αν έχει ένα στοιχείο θα έχει και τον αντιστάσιο

$$(123) \notin Z(S_3) \Rightarrow (123)^{-1} \notin Z(S_3) \\ \text{"} \\ (132)$$

Άρα διάφορα G σε χώρο X

ορίδια: Συστή, ισοπλά, δι. ισοπλάσιος κλπ.

Βασικά παραδείγματα: π.χ. αριθμητικά κλάση

Παράφοι: Στο νευκλιανός Αποκρίσις 8/Ex-3

Παράφοι που είναι ή μη ισοπλάσιες

(ενός μπορεί να είναι ισοπλάσιες των άλλων.)

Grp. 9.
a) \mathbb{Z}_3

.	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Av $|G|=p$, nprmas \Rightarrow 1 solen abasaske p soikeia

$\forall a \in G$ ord(a) = 1, p?
a) \forall ord(a) = p \Rightarrow $\langle a \rangle = G$ korfjen

ord(a) = 1. Deu jiverae! jato tote ja ta soikeia va emon tajn 1 \Rightarrow Eivar bar to e affa ekel kae p soikeia Atoto

.	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_4$

b) $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$

$(m,n)=1 \Rightarrow$ To soikeio $(1,1)$ ekel tajn mn $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ekel (mn)

Olws $|\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = mn$
 $\Rightarrow \langle (1,1) \rangle = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \Rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ korfjen

Esau tupa $(m,n) \neq 1$
D.S.O $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ xi korfjen
 $\langle I \rangle \times \langle I \rangle$

$$\mathbb{Z}_m = \langle \bar{1} \rangle = \langle \overline{m-1} \rangle = \langle \bar{e} \rangle \quad (k, n) = 1$$

Αν νζαν τωξίαν δα επεξε να παπαξίρεα
ano to $(\bar{1}, \bar{1})$ olws
 $ord(\bar{1}, \bar{1}) = \text{E}k\pi(m, n) \neq mn$

παρ; εσως οα υπαρεί $(\bar{a}, \bar{b}) \neq (\bar{1}, \bar{1})$
 $\langle (\bar{a}, \bar{b}) \rangle = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$
 $(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{b}) = (2\bar{a}, 2\bar{b}) \Rightarrow \langle \bar{a} \rangle = \mathbb{Z}_m = \langle \bar{1} \rangle$
 $\langle \bar{b} \rangle = \mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$

γ) Π.Π.Α.Ο $|G| = 200$
 $200 = 2^3 \cdot 5^2$
" $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

α) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{200}$ τωξίαν $(8, 25) = 1$

β) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5^2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{100} \cong \mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_4$ για $(25, 4) = 1$

γ) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5^2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{50}$

$\mathbb{Z}_8 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ Δευ είναι ισομορφικές για
n μία ημερεί ελοικετ τωξίαν 8 εως n
αππ ενι ελοικετα τωξίαν 2 και 4.

* Πανα $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n = \langle (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}) \rangle$
↑ σπαλιετος ελοικετος
αεζίον τωξίαν
οδίκετω
Sioca $(\bar{a}, \bar{b}) = a(\bar{1}, \bar{0}) + b(\bar{0}, \bar{1}) = a(\bar{1}, \bar{0}) + b(\bar{0}, \bar{1})$

$ord(\bar{1}, \bar{0}) = m$
 $ord(\bar{0}, \bar{1}) = n$ *

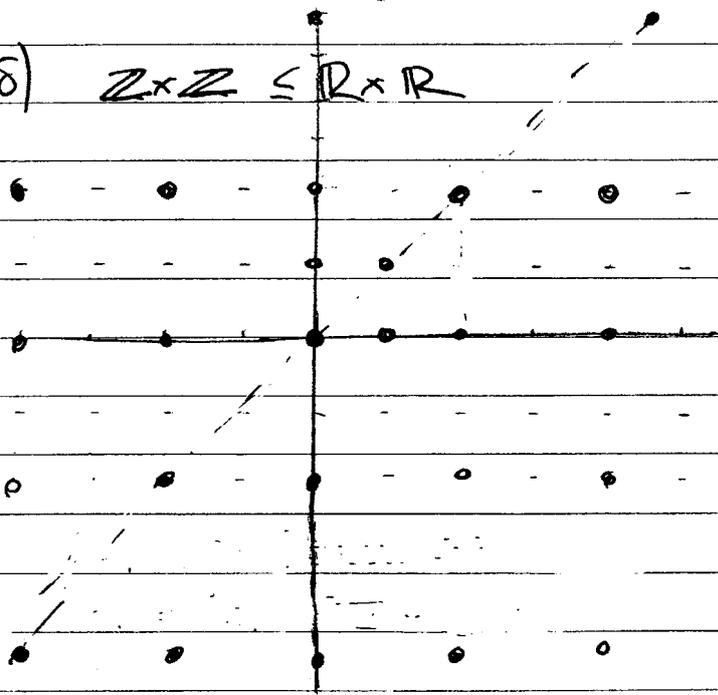
ελοικετο τωξίαν 4: $(\bar{0}, \bar{1})$
ελοικετο τωξίαν 2: $(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2})$

d) $\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_5$

e) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{20}$

a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$

d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \leq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$\langle (2,3) \rangle = \{k(2,3) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\langle 2 \rangle \times \langle 3 \rangle = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} = \{(2k, 3\lambda) \mid k, \lambda \in \mathbb{Z}\}$

$\langle (2,3) \rangle \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \{0\}$

$\langle 2 \rangle \times \langle 3 \rangle \cong 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$

$\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (2,3) \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \times \{0\}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \cong \{0\} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_3$

$\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle 2 \rangle \times \langle 3 \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow 6 \text{ admissibles}$

$\langle 2 \rangle \times \langle 3 \rangle = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ (not a subgroup)

$\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}} = \{(a,b) + 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$

• Av $(a,b) \in 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ TOTE TO $(a,b) + 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$

9

\Rightarrow Εκπορευση $(0,0)$

• $(a,b) = (1,0) \Rightarrow$ Σ υποομοιο του $(1,0) = \{(1,0) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} = \{2k+1, 3\ell\}$ εκπορευσης $(1,0)$

• $(a,b) = (1,2)$

Το υποομοιο $(1,2) : \{(1,2) + (2k, 3\ell) \mid k, \ell \in \mathbb{Z}\} = \{2k+1, 3\ell+2 \mid k, \ell \in \mathbb{Z}\}$

Γενικότερα, είναι η μετατόπιση της κάθε ποσ. κορυφών κατά το διάνυσμα $(1,2)$

Επιπλέον εκπορευσεις $\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (0,2), (1,2)\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\langle (2,3) \rangle$

$(a,b) + \langle (2,3) \rangle$

$(1,2) + \langle (2,3) \rangle = \{(1,2) + k(2,3) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1+2k, 2+3k\}$

Δίνει επίσης ποσότητες ~~των~~ $\langle (2,3) \rangle$ που ανήκουν τα $\{k(2,3), k \in \mathbb{Z}\}$

Παρατηρήσεις

2-ην $\langle (2,3) \rangle$ των κοκκίων κορυφών $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (για κλίση 3/2 της ευθείας). Άρα η κοκκίων ευθεία δίνει ένα μόνο ένα υποομοιο.

Ένω αν ελάττω

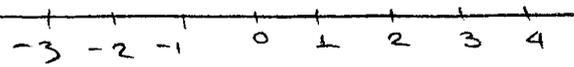
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
 $\langle (3,2) \rangle$

$\langle (3,2) \rangle = \{k(3,2) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{3k(1,1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong_{\langle (3,3) \rangle} \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{3\mathbb{Z} \times 10\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10}$$

Exercice 3

1) $(\mathbb{R}, +)$

a)  $t + \mathbb{Z} = \{t+0, t+1, t+2, \dots\}$

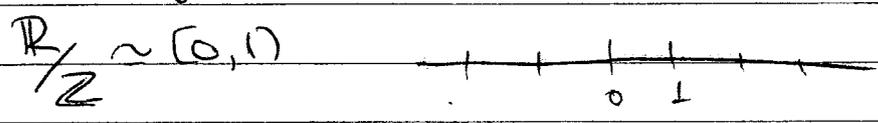
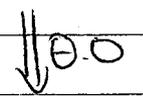
b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $[t] = \text{entier le plus grand } \leq t$.
Toute $0 \leq t - [t] < 1$ se écrit :

$$(t - [t]) + \mathbb{Z} = t + \mathbb{Z} \text{ Soit}$$
$$t - (t - [t]) = [t] \in \mathbb{Z}$$

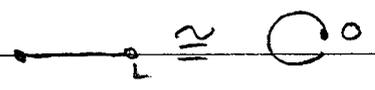
On a $0 \leq s < 1$ Toute $s + \mathbb{Z} \neq t + \mathbb{Z}$
Soit affines $s - t \in \mathbb{Z}$ Alors

2) \mathbb{R}/\mathbb{Z}

$\phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ z.w $\ker \phi = \mathbb{Z}$ $\text{Im} \phi = [0, 1)$



Tout $x \in \mathbb{R}$ t.w toute x appartient à une classe
soit \circ

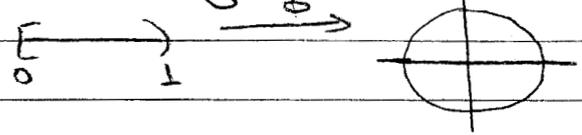


Pour la loi de composition on a $x \cdot y = \begin{cases} x+y, & \text{si } x+y < 1 \\ x+y-1, & \text{si } x+y > 1 \end{cases}$

pour $x, y \in [0, 1)$

Donc $([0, 1), \cdot)$ est un groupe

$\Delta_0 \quad ([0,1), 0) \cong K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$ με mapping του mapping στο \mathbb{C}



$e^{2\pi i x} \in K \quad 0 \leq x < 1$ όπου $\theta = 2\pi x \in [0, 2\pi)$
 $\phi(x) = e^{2\pi i x} \quad \forall x \in G$
 $\Delta_0. \phi$ \perp \perp , επι ολοθ. διαμορφών

Ασκήσ/Εργ 3
 $(A \times B, +)$

a) $(a_1, b_1) [(a_2, b_2)(a_3, b_3)] = \dots = [(a_1, b_1)(a_2, b_2)](a_3, b_3)$
 $(a_1, b_1) [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = \dots = (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3)$

b) $A^* = \{αντιστροφες \muεταστροφες A\}$
 (A^*, \cdot) ομάδα

- $1 \in A^*$
- αν $a \in A^* \Rightarrow a^{-1} \in A$
- $a, b \in A^* \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$ και $(ba)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$
 $\Rightarrow ab \in A^*$

γ) $(1,1)$ μοναδικό στο $A \times B$
Εστω $(a,b) \in (A \times B)^* \Leftrightarrow \exists (a', b') \in (A \times B)^*$

το ω .

$$\left. \begin{matrix} (a,b)(a',b') = (1,1) \\ (a',b') \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} aa' = 1 \\ bb' = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} a' = a^{-1} \\ b' = b^{-1} \end{matrix}$$

$\Leftrightarrow a \in A^*, b \in B^* \Leftrightarrow (a,b) \in A^* \times B^*$

d) $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_{mn}, +, \cdot) \Leftrightarrow (m, n) = 1$

$\phi: (\bar{1}, \bar{1}) \rightarrow \bar{1} \in \mathbb{Z}_{mn}$ Isomorphism

$\phi((\bar{a}, \bar{b}) \cdot (\bar{c}, \bar{d})) = \phi(\bar{a}, \bar{b}) \phi(\bar{c}, \bar{d}) \Rightarrow$

Isomorphismes Satz.

e) $\mathbb{Z}_{15}^* \cong \mathbb{Z}_3^* \times \mathbb{Z}_5^* \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}_{15}^* \cong \mathbb{Z}_3^* \times \mathbb{Z}_5^*$

$\mathbb{Z}_3^* = \{\bar{1}, \bar{2}\} \quad (\bar{2})^{-1} = \bar{2}$

$\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \quad (\bar{3})^{-1} = \bar{2}$

$(\bar{4})^{-1} = \bar{4}$

$\mathbb{Z}_3^* \times \mathbb{Z}_5^* = \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), \dots\}$

$(\bar{1}, \bar{1}) \mapsto \bar{1} \in \mathbb{Z}_{15}$

$(\bar{1}, \bar{2}) \mapsto \bar{7}$

$(\bar{1}, \bar{3}) \mapsto \bar{13}$

$(\bar{1}, \bar{4}) \mapsto \bar{4}$

$(\bar{2}, \bar{1}) \mapsto \bar{11}$

$(\bar{2}, \bar{2}) \mapsto \bar{2}$

$(\bar{2}, \bar{3}) \mapsto \bar{8}$

$(\bar{2}, \bar{4}) \mapsto \bar{14}$